

Fondements de la mécanique quantique et paradoxes

Nicolas WEBER
Université de Technologie de Belfort Montbéliard

Printemps 2016

Table des matières

1 Ondes et Particules. Introduction aux idées fondamentales de la mécanique quantique	6
1.1 Le concept de dualité des particules : onde - particule	6
1.1.1 la dualité des particules selon Albert Einstein	6
1.1.2 Expérience du biprisme de Fresnel, de P.Grangier A. Aspect et G.Roger	8
1.1.3 Expérience à choix retardé de Wheeler	10
1.2 Postulats, états et observables	13
1.2.1 Notion d'états et d'observables en physique classique	13
1.2.2 L'expérience du biprisme de Fresnel et l'espace des états	13
1.2.3 L'expérience du biprisme de Fresnel et les observables	14
1.2.4 La non-commutativité des observables	15
1.3 Équation du mouvement, position et impulsion	17
1.3.1 L'équation de Schrödinger	17
1.3.2 Règles de quantification canonique	18
1.3.3 Lagrangien et Hamiltonien en mécanique classique	18
2 Qubits, spin et intrication	20
2.1 Bit quantique	20
2.1.1 Qubits	20
2.1.2 Mesure d'un qubit dans un espace de Hilbert	20
2.1.3 Exemple de Qubits	21
2.2 Le spin	22
2.2.1 L'expérience de Stern et Gerlach	22
2.2.2 Résultats expérimentaux	23
2.2.3 Représentation dans une base particulière	23
2.2.4 Représentation matricielle	24
2.2.5 Représentation dans la Sphère de Bloch	24
2.3 États à deux qubits	25
2.3.1 Produit tensoriel	26
2.3.2 Exemple de produit tensoriel	26
2.4 Intrication	27
2.4.1 Protocole de téléportation quantique	27
3 Paradoxe EPR, inégalité de Bell , CHSH game et Kochen-Specker : Localité et Contextualité	30
3.1 Le Paradoxe EPR	30
3.2 L'argument EPR	31
3.3 Inégalité de Bell	33
3.4 CHSH game	34
3.5 Théorème de Bell-Kochen-Specker	36

Remerciements

Je souhaite adresser mes sincères remerciements à Monsieur Holweck, Professeur de mathématiques à l'UTBM qui a accepté de m'accompagner tout au long de mon sujet d'étude, pour le temps précieux qu'il m'a consacré et l'enthousiasme qu'il m'a communiqué à travers son enseignement.

Je remercie Monsieur Zullo, Professeur de mathématiques à l'UTBM qui a également répondu mes questions.

Je remercie ma mère, complètement réfractaire aux mathématiques, et nombre de mes amis qui ont patiemment relu ou écouté mon rapport.

Je remercie aussi Wikipédia et ses contributeurs dont j'ai utilisé les notes sur les scientifiques comme source d'inspiration.

Enfin, je remercie les Professeurs Flesch, Briand et Saniga d'avoir accepté d'être présents lors de ma soutenance.

Introduction

"Il est absolument possible qu'au delà de ce que perçoivent nos sens, se cachent des mondes insoupçonnés"

- **Albert Einstein**

Derrière cette citation d'Enstein, je me suis demandé quels sont les concepts qui traduisent des faits observables par la perception de nos sens. Comment arrivons nous à décrire ces phénomènes physiques visibles et surtout comment la théorie permet-elle de nous faire découvrir ces "mondes insoupçonnés". Lors des grandes découverte scientifiques, l'homme à pu dépasser les limites de ses perceptions sensorielles. La physique quantique va au delà encore, puisqu'elle se joue de son observateur. Mon choix d'étude s'est porté sur ces phénomènes complexes et mystérieux.

Nous allons dans ce mémoire nous intéresser dans un premier temps, à introduire les idées fondamentales de la mécanique quantique, à partir d'expériences présentant les phénomènes de cette dernière. Dans un second temps, nous allons donner une représentation des systèmes quantiques, afin d'appliquer les postulats à des cas simples. Enfin nous étudierons le "mystère" de la physique quantique, à travers des paradoxes et des théorèmes, qui on tourmenté les grands cerveaux du XX^{eme} siècle.

Chapitre 1

Ondes et Particules. Introduction aux idées fondamentales de la mécanique quantique

La physique quantique complexe et mystérieuse a soulevé nombre de questions dans la communauté scientifique du XX^{eme} siècle et nous allons suivre le cheminement des avancées dans la matière au gré des expériences présentées. Dans ce chapitre, nous allons introduire les idées fondamentales de la mécanique quantique. Pour cela nous allons présenter et analyser des expériences représentatives des phénomènes quantiques observables et en déduire les postulats qui fondent la théorie.

1.1 Le concept de dualité des particules : onde - particule

1.1.1 la dualité des particules selon Albert Einstein

Parmi les nombreux raisonnements pour démontrer la dualité d'un rayonnement, nous allons nous intéresser au raisonnement d'Einstein publié en 1909, dans l'article *The development of our views on the composition and essence of radiation*, Physikalische Zeitschrift, à la suite de la conférence de Salzburg, avec une expérience de pensée.

Dans un caisson hermétique, on place d'un côté une source qui émet des radiations, un corps noir, et de l'autre un gaz parfait, les deux étant séparés par une membrane mobile. Ce système doit être à l'équilibre. Les fluctuations du rayonnement du corps noir se traduisent par des fluctuations de la pression de radiation exercée sur la membrane ainsi :

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{c} \left(h\rho\nu + \frac{c^3\rho^2}{8\pi\mu^2} \right) d\nu f\tau$$

"En essayant de comprendre cette expression, on note immédiatement que c'est la somme de deux termes. Le second terme peut être expliqué par la théorie ondulatoire et le premier terme résulte de l'hypothèse que le rayonnement est constitué de groupements localisés d'énergie (les quanta) $h\nu$ qui sont réfléchis sur cette paroi."

Autrement dit, les fluctuations de pression de radiation dépendent du terme :

$$\frac{c^3\rho^2}{8\pi\mu^2}$$

que l'on obtient en calculant d'abord par la théorie de Maxwell, la pression exercée par une seule onde, puis en l'appliquant à plusieurs ondes en prenant en compte les bruits, les fluctuations.

Le second terme :

$$h\rho\nu$$

est ce que l'on appelle le "shot noise" qui est la fluctuation associée à la pluie d'impulsion.
Einstein conclut qu'en calculant cette équation, il y a un terme dû à un modèle de particules, et un terme dû à un modèle d'ondes.
Donc le rayonnement est à la fois une onde et une particule.



FIGURE 1.1 – N.Bohr (à gauche) et A. Einstein (à droite)

1.1.2 Expérience du biprisme de Fresnel, de P.Grangier A. Aspect et G.Roger

Après la pensée, vient le temps de l'expérience. Or, jusqu'à lors, l'impossibilité technique de générer un photon unique nécessaire et indispensable à la démonstration qui va suivre ne permettait pas des mesures précises.

La première démonstration expérimentale d'une source capable de produire des impulsions lumineuses à un seul photon, a été réalisée par Philippe Grangier, Alain Aspect, et Gérard Roger lors d'une expérience menée à l'Institut d'Optique au milieu des années quatre-vingt, en utilisant une cascade radiative de l'atome de calcium. Le principe qui permet de créer des photons uniques consiste à isoler l'émission de fluorescence d'un émetteur individuel. En effet, en raison de la conservation de l'énergie, cet émetteur une fois porté dans un état excité se désexcite en émettant un, et un seul, photon de fluorescence. L'interféromètre à division du front d'onde est constitué par un biprisme de Fresnel. Ce système, analogue au dispositif des fentes de Young, présente l'avantage de ne pas introduire de pertes significatives de lumière lors de la traversée du dispositif d'interférométrie.

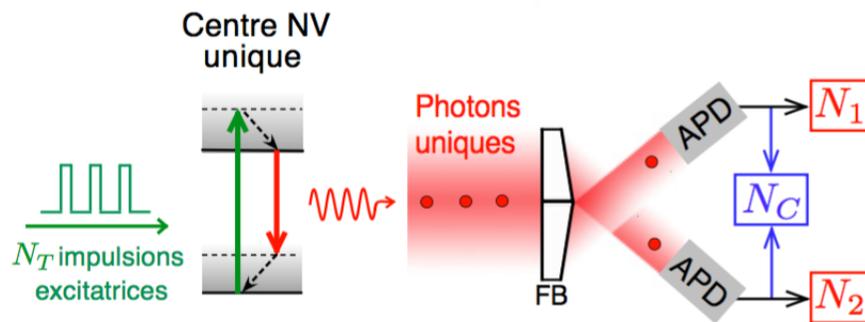


FIGURE 1.2 – La lumière de photoluminescence d'un centre coloré NV unique excité par un laser impulsif est envoyée sur un biprisme (FB). Deux photodiodes à avalanches (APD), sont positionnées en sortie du système interférométrique, loin de la zone de recouvrement des deux fronts d'onde déviés par le biprisme. Pour un nombre d'impulsions N_T appliqué au centre NV individuel pendant une durée de mesure T , ce dispositif permet de mesurer le nombre de détections simples N_1 et N_2 , ainsi que le nombre de détections en coïncidences N_C .

Dans une première expérience basée sur le dispositif décrit en figure 1.2, un photon unique est émis et traverse le prisme avant d'être capté par les détecteurs N_1 et N_2 qui assure la présence d'un photon unique. Le photon unique est détecté soit par N_1 soit par N_2 mais jamais par les deux capteurs à la fois (N_C).

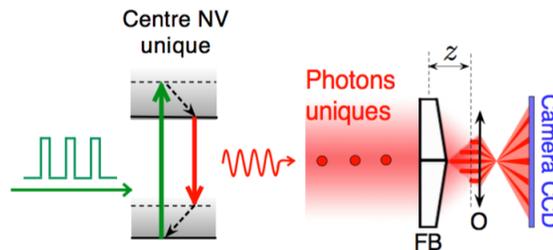


FIGURE 1.3 – Enregistrement des franges d'interférence à un photon. Un oculaire (O) de grandissement $\times 10$ conjugue un plan d'observation situé dans la zone de recouvrement des fronts d'onde issus du biprisme de Fresnel (FB) avec la surface de détection d'une caméra CCD intensifiée. La distance z correspond à la séparation entre le biprisme et le plan conjugué par l'oculaire sur la caméra.

Dans une seconde expérience basée sur le dispositif d'écrit en figure 1.3, le photon après le passage dans le prisme est détecté à l'aide d'une caméra CCD. Les résultats sont représentés ci-dessous.

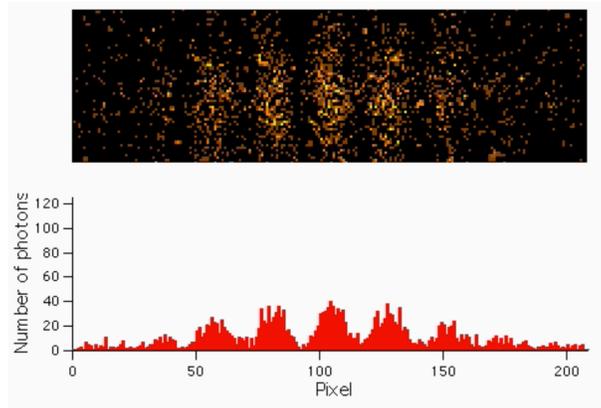


FIGURE 1.4 – Observation de la construction des franges d'interférence, photon par photon, au moyen de la caméra CCD intensifiée à $t = 5sec$

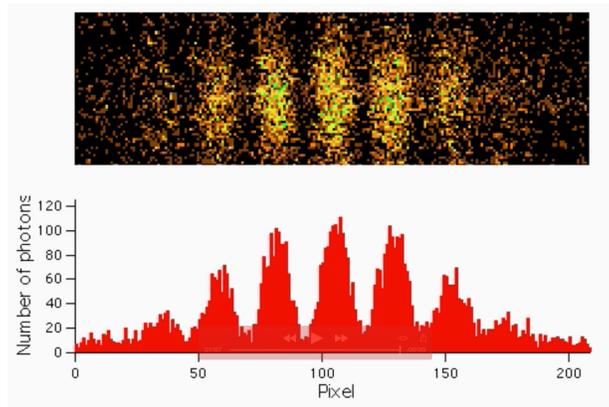


FIGURE 1.5 – Observation de la construction des franges d'interférence, photon par photon, au moyen de la caméra CCD intensifiée à $t = 60sec$

La première expérience met en évidence une anticorrélation entre les détections sur les deux voies de sortie du biprisme de Fresnel. Ce résultat ne peut s'interpréter qu'en considérant l'image d'une particule indivisible, choisissant un des deux chemins de l'interféromètre, mais jamais les deux à la fois.

Dans la deuxième expérience, la figure d'interférence enregistrée ne peut se comprendre qu'en considérant une onde, se divisant pour moitié sur le biprisme de Fresnel, se propageant suivant les deux chemins de l'interféromètre, pour finalement se recombiner dans le plan d'observation où la caméra CCD est positionnée. La différence de chemin optique entre les deux chemins conduit alors au phénomène d'interférence.

Ainsi, la lumière révèle des comportements classiques incompatibles suivant la nature de l'expérience réalisée.

1.1.3 Expérience à choix retardé de Wheeler

Dans cette section nous allons reprendre les expériences réalisées par P. Grangier et A. Aspect en 1982, basées sur les travaux de J. A. Wheeler, pour démontrer le phénomène de la dualité d'un rayonnement. Ces expériences sont établies à partir de deux circuits optiques décrits si-dessous.

La première expérience consiste à envoyer des photons un par un sur une lame semi-réfléchissante. ils sont alors soit réfléchis, soit transmis, ce qui est détecté par les deux capteurs P1 et P2.

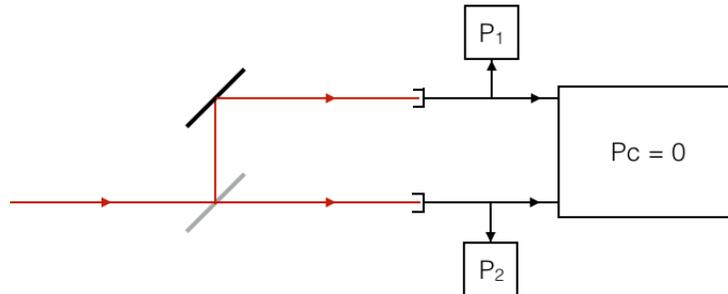


FIGURE 1.6 – Circuit optique montrant l'aspect corpusculaire d'une particule

Dans la seconde expérience, on remplace les détecteurs par un système dit d'interféromètre de Mach-Zehnder, constitué de deux miroirs et de deux miroirs semi-réfléchissants. Le faisceau de lumière cohérente projeté sur la lame semi-réfléchissante est divisé en deux faisceaux. Puis ces deux faisceaux sont recombinaés à l'aide d'une autre lame semi-réfléchissante. Ils vont donc pouvoir interférer entre eux.

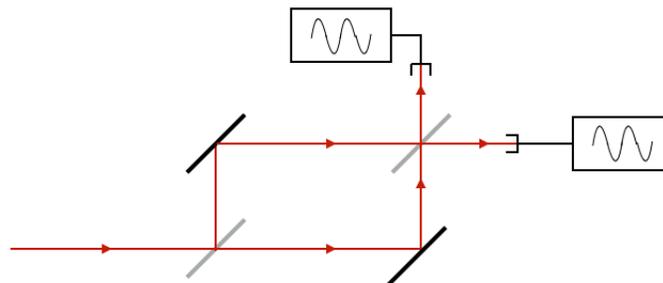


FIGURE 1.7 – Circuit optique montrant l'aspect ondulatoire d'une particule

Lors de la première expérience, le photon passe soit d'un côté soit de l'autre.

Lors de la deuxième expérience, on observe quelque chose qui est passé des deux côtés à la fois. On a donc bien une dualité onde/particule.

Or, selon la méthode de penser de Bohr, on ne peut pas réaliser simultanément les deux expériences sur le même photon. On lui pose soit la première question : par quel côté passes-tu? Soit la deuxième question : est-ce que tu interfères et donc passes-tu des deux côtés à la fois?

Si l'on se réfère aux ouvrages de Bohr, ce qui crée la réalité physique du système, ce n'est pas une qualité intrinsèque au photon, mais l'appareil de mesure lui-même. Selon Bohr, le photon émis prendra un aspect corpusculaire si on lui demande de se comporter comme une particule ou un aspect ondulatoire si on lui demande de se comporter comme une onde.

Intervient alors Wheeler qui se demande ce qui se passerait si la mesure était effectuée après le passage du photon dans la lame semi-réfléchissante. En effet le photon ne sait pas encore laquelle des deux questions va lui être posée. Wheeler va proposer le schéma suivant :

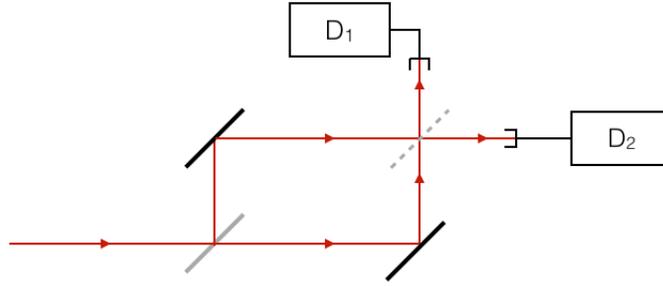


FIGURE 1.8 – Expérience de pensée de l’argument EPR

Dans ce circuit optique on choisit de mettre ou d’enlever la lame semi-réfléchissante après que le photon soit passé dans la première lame.

Cette expérience a été réalisée à l’institut d’optique avec un dispositif plus complexe.

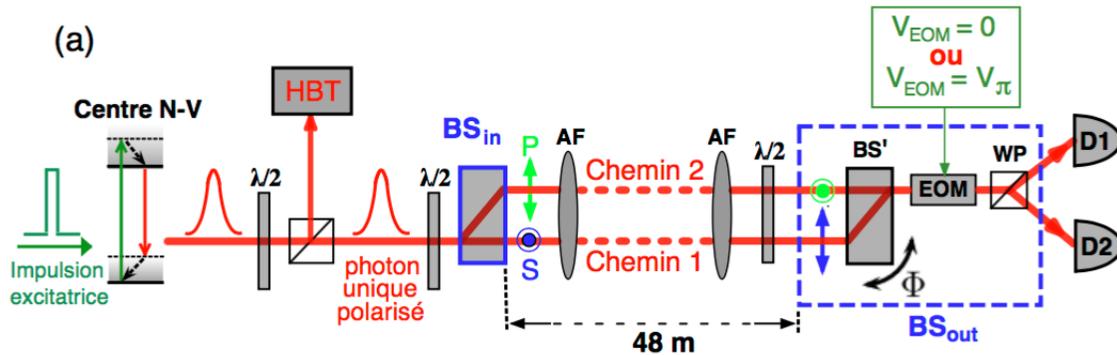


FIGURE 1.9 – Expérience de pensée de l’argument EPR

L’expérience de choix retardé est réalisée en choisissant de manière aléatoire la tension appliquée à l’EOM¹, correspondant au choix aléatoire entre la configuration ouverte ou fermée de l’interféromètre, et en filtrant la photoluminescence des centres colorés NV pour optimiser le contraste des interférences. Pour chaque photon envoyé dans l’interféromètre, le résultat du tirage aléatoire est enregistré ainsi que la potentielle détection d’un photon par les détecteurs D1 et D2 positionnés sur les voies de sortie de l’interféromètre. Pour piloter l’expérience et enregistrer les données, un programme permet d’une part de contrôler la tension appliquée au PZT², qui contrôle la différence de chemin optique entre les deux bras de l’interféromètre, et d’autre part de lire les informations enregistrées sur la carte d’acquisition. La tension appliquée au PZT est modifiée pas à pas, avec un pas typique de l’ordre de 0.5 V qui correspond à une modification de la différence de marche d’environ 40 nm. La durée d’enregistrement est fixée à 1.9 s pour chaque position du PZT, correspondant à la détection d’environ 2000 photons. Toutes les données sont sauvegardées en temps réel et sont traitées à la fin de l’expérience. Pour chaque position du PZT, le programme trie alors les événements correspondant à chacune des deux configurations de l’interféromètre, faisant alors apparaître les résultats reproduits sur la figure 1.5. Pour les événements correspondant à la configuration fermée de l’interféromètre, nous observons un phénomène d’interférence avec un contraste $C = 94 \pm 1\%$, dont l’écart à l’unité est attribué à un recouvrement imparfait des fronts d’onde associés aux deux chemins d’interférence.

1. modulateur électro-optique

2. transducteur piézo-électrique, mécanisme qui permet de modifier l’angle Φ

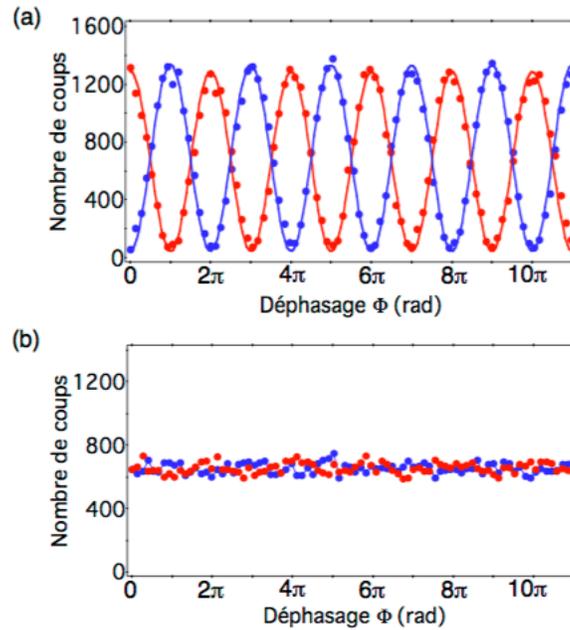


FIGURE 1.10 – Résultat final de l’expérience de choix retardé. (a)-Lorsque la tension demi-onde V_π est appliquée aléatoirement à l’EOM, un phénomène d’interférence avec un contraste de $94 \pm 1\%$ est obtenu. (b)-Lorsqu’une tension nulle est appliquée à l’EOM, les interférences disparaissent, correspondant à une parfaite détermination du chemin suivi par le photon dans l’interféromètre.

Les résultats de l’expérience de choix retardé illustrent la nécessité de considérer l’objet quantique d’étude et l’appareil de mesure comme une seule et même entité. En particulier, le comportement d’un état de lumière à un photon dans un interféromètre dépend du choix de la configuration de mesure, même lorsque ce choix est réalisé aléatoirement. Ainsi, aucune réalité physique classique ne saurait être attribuée au photon indépendamment de l’appareil de mesure, comme le stipule le principe de complémentarité. Comme le souligne Niels Bohr, « it obviously can make no difference as regards observable effects obtainable by a definite experimental arrangement, whether our plans of constructing or handling the instrument are fixed beforehand or whether we prefer to postpone the completion of our planning until a later moment when the particle is already on its way from one instrument to another ».

Cependant, il n’est pas possible de considérer que l’état de lumière en entrée de l’interféromètre adapte sa nature ondulatoire ou corpusculaire en fonction du dispositif expérimental de mesure. Pour expliquer les résultats de l’expérience du choix retardé, il est nécessaire de considérer que l’état de lumière se comporte simultanément comme une onde et une particule, bien que ces deux images classiques ne soient pas en accord.

Définition 1 (Complémentarité selon Niels Bohr). *Peu importe à quel point les phénomènes quantiques transcendent les explications de la physique classique, il n’en demeure pas moins que les descriptions que l’on en fera devront être données en termes classiques. L’argument est, simplement, que par « expérience » nous entendons une situation dans laquelle nous pouvons décrire aux autres ce que nous avons fait et appris ; par conséquent, la description des dispositifs expérimentaux et les résultats des observations doivent être exprimés dans un langage sans ambiguïté, applicable dans la terminologie de la physique classique. Ce point crucial (...) entraîne l’impossibilité de toute séparation tranchée entre le comportement des objets atomiques et l’interaction avec les instruments de mesure qui servent à définir les conditions dans lesquelles ces phénomènes apparaissent.*

1.2 Postulats, états et observables

Désormais, à l'aide des expériences exposées ci-dessus, nous allons nous attacher à présenter les postulats qui en découlent.

1.2.1 Notion d'états et d'observables en physique classique

La pratique de la physique suppose l'intervention de deux entités, le système physique étudié et l'observateur qui l'étudie. La modélisation d'une théorie physique doit donc faire intervenir des concepts qui caractérisent ces deux entités. Le système physique va être caractérisé par des états, c'est à dire des quantités mathématiques décrivant les propriétés intrinsèques du système. L'intervention de l'observateur, qui effectue des mesures sur le système, va être caractérisée par des observables, c'est à dire des quantités mathématiques qui vont décrire les résultats des mesures effectuées sur le système en fonction de l'état de celui-ci.

Exemple : En mécanique classique, si le système étudié est le déplacement d'un point matériel, les observables associés sont : la position du système, sa quantité de mouvement.

1.2.2 L'expérience du biprisme de Fresnel et l'espace des états

Afin d'établir la structure du modèle de la mécanique quantique, interprétons l'expérience du biprisme de Fresnel.

1. L'expérience a relevé la dualité onde - particule d'une source de photon unique. Ainsi la nature ondulatoire de la particule incite à décrire l'état d'une fonction d'onde $\psi(x, y, z)$
2. Les impacts se répartissant suivant un processus aléatoire, on en déduit que la mesure de la position des particules est gouvernée par une loi de probabilité associée à la figure d'interférences. Il existe donc une loi de probabilité $\rho(x, y, z)$ telle que $\rho(x, y, z)dxdydz$ soit la probabilité de trouver la particule dans un cube de volume $dxdydz$ dont l'un des sommets se trouve au point (x, y, z) . C'est à dire si $D \subset \mathbb{R}^3$ est une région de l'espace, alors $\iiint_D \rho(x, y, z)dxdydz$ est la probabilité de trouver la particule dans cette région.
3. Soit ψ_1 la fonction d'onde de la particule lorsqu'elle passe par le bas du biprisme de Fresnel et ψ_2 la fonction d'onde lorsqu'elle passe par le haut. La présence de la figure d'interférences induit que la fonction d'onde n'est ni ψ_1 ni ψ_2 mais $\psi \propto \psi_1 + \psi_2$. Les particules étant émises une à une, on en déduit qu'une particule se trouve dans un état où elle est passée à la fois par le haut et par le bas, c'est une superposition d'états. On en déduit donc que l'espace des états a une structure d'espace vectoriel.
4. Soit ρ_1 la loi de probabilité associée à ψ_1 , ρ_2 celle associée à ψ_2 et ρ la densité de probabilité associée à $\psi \propto \psi_1 + \psi_2$. On doit avoir $\rho(x, y, z) = \rho_1(x, y, z) + \rho_2(x, y, z) + 2 \cos \chi_{12}(x, y, z)$ où le terme $\cos \chi_{12}(x, y, z)$ est la modulation nécessaire pour décrire la figure d'interférence. La présence de ce terme est typique de la structure du corps des nombres complexes : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cos \arg(\bar{z}_1 z_2)$ L'espace vectoriel des états est donc construit sur le corps \mathbb{C} .
En combinant tous ces points, on en déduit que l'état d'une particule est (décrit par) une fonction ψ de l'espace à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\rho(x, y, z) = \frac{|\psi(x, y, z)|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 dxdydz}$ soit la densité de probabilité de présence de la particule. On doit donc avoir $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 dxdydz < \infty$

Postulat 1 (Espace des états). *L'espace des états d'un système régit par la mécanique quantique est représenté par un espace pré-Hilbertien, c'est à dire un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.*

Définition 2 (Produit scalaire hermitien). *Soit \mathcal{H} un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un produit scalaire hermitien est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

— elle est linéaire à droite et antilinéaire à gauche :

$$\forall \psi, \phi, \chi \in \mathcal{H} \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \langle \psi | \alpha \phi + \beta \chi \rangle = \alpha \langle \psi | \phi \rangle + \beta \langle \psi | \chi \rangle$$

$$\langle \alpha \psi + \beta \phi | \chi \rangle = \bar{\alpha} \langle \psi | \chi \rangle + \bar{\beta} \langle \phi | \chi \rangle$$

— elle est hermitienne :

$$\forall \psi, \phi \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | \psi \rangle}$$

— elle est définie positive :

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \\ \|\psi\|^2 &= \langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff \psi = 0 \end{aligned}$$

La nécessité d'équiper l'espace des états d'un produit hermitien et non simplement d'une norme provient des postulats qui vont suivre. L'espace pré-Hilbertien en question pour une particule seule semble être $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ l'espace des fonctions de \mathbb{R}^3 à valeur dans \mathbb{C} et de carré intégrable, c'est à dire telles que $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz < \infty$. La fonction $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ est interprétée comme l'amplitude de probabilité de présence de la particule. Ainsi la probabilité de trouver la particule dans une portion Ω de l'espace est égal à $P(\Omega) = \int_{\Omega} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz$. Si on a normé la fonction d'onde, $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1$. Le produit hermitien dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ est

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(x, y, z) \phi(x, y, z) dx dy dz$$

1.2.3 L'expérience du biprisme de Fresnel et les observables

Reprenons l'expérience du biprisme de Fresnel, mais cette fois avec deux détecteurs. On sait à quel instant la source émet une particule, si bien que si un détecteur donne une réponse positive, on sait de quel coté la particule est passée, si non, on sait qu'elle est passée par l'autre coté. Il n'y a donc que deux états "fondamentaux" par rapport à cette expérience, l'état pour lequel la particule est passée par le bas que l'on va noter $|1\rangle$ et $|2\rangle$ l'état pour lequel elle est passée par le haut. L'espace de Hilbert est donc simplement \mathbb{C}^2 , et du fait de la superposition d'états, on peut avoir un état $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ tel que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Le produit hermitien est défini dans ce cas par,

$$\forall |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \langle \psi | \phi \rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^* \psi_1 + \phi_2^* \psi_2$$

On place la source de telle sorte qu'il y ait "classiquement" une chance sur 3 pour que la particule passe par le bas et deux chances sur 3 pour qu'elle passe par le haut. Une description de l'état conforme à l'expérience classique peut être : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$

Résultat de l'expérience : on mesure dans 1/3 des cas une particule passant par le bas et dans 2/3 des cas une particule passant par le haut, et sur l'écran final, on n'observe pas de figure d'interférences. Si on change les coefficients de la superposition d'états, les lois de probabilités changent en conséquence. Ainsi si l'on fait en sorte de placer la source de telle manière que la particule ne puisse passer que par le bas, le détecteur donnera une réponse positive à chaque fois.

Interprétation :

1. l'absence de figure d'interférences indique que le fait de mesurer la position de la particule à la sortie du biprisme a détruit la superposition d'états.
2. les statistiques des mesures de passage par le bas ou par le haut correspondent à la loi de probabilité de la superposition d'états, on en déduit que le fait de mesurer le passage de la particule projette l'état de celle-ci soit sur $|1\rangle$ soit sur $|2\rangle$ suivant un processus aléatoire tel que $P(1) = |\langle 1 | \psi \rangle|^2$ et $P(2) = |\langle 2 | \psi \rangle|^2$
3. soit A l'observable associé au détecteur de particules. A n'a que deux réponses, 1 s'il détecte une particule, 0 sinon. Le fait que la réponse soit toujours positive si la particule passe par le bas, indique que l'évaluation de A sur $|1\rangle$ doit donner 1.

De même l'évaluation de A sur $|2\rangle$ doit donner 0. Ainsi A peut être vu comme un opérateur tel que $A|1\rangle = 1$ et $A|2\rangle = 0$ et donc A a pour matrice dans la base $(|1\rangle, |2\rangle)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les résultats possibles sont les valeurs propres de A , et les états sans superposition et donc sans processus aléatoire, $|1\rangle$ et $|2\rangle$, sont des états propres associés.

Postulat 2 (Observables). *Les observables, c'est à dire les grandeurs physiques mesurables expérimentalement sont décrites par des opérateurs hermitiens agissant sur l'espace des états.*

On note $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} .

Postulat 3 (Résultats d'une mesure). *La mesure d'une grandeur physique associée à un opérateur A ne peut donner qu'une valeur propre de cet opérateur. Si α est une valeur propre de A n_α fois dégénérée, associée aux vecteurs propres $\{|\alpha, i\rangle\}_{i=1, \dots, n_\alpha}$, alors la probabilité de trouver α comme résultat de la mesure de A sur un système dans l'état ψ est donnée par $P(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} |\langle \alpha, i | \psi \rangle|^2$.*

On note $SP(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A , que l'on appelle spectre de A

Postulat 4 (principe de projection de Born). *Si une mesure d'un observable A sur un système dans l'état ψ a donné comme résultat α , alors après la mesure, le système se trouve dans l'état*

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_\alpha} |\langle \alpha, j | \psi \rangle|^2}} \sum_{i=1}^{n_\alpha} \langle \alpha, i | \psi \rangle |i, \alpha\rangle$$

où $\{|\alpha, i\rangle\}_{i=1, \dots, n_\alpha}$ sont l'ensemble des états propres caractérisés par la valeurs propre α de A (états pour lesquels, la probabilité de trouver α comme résultat est 1).

1.2.4 La non-commutativité des observables

Un aspect très important de la mécanique quantique est la conséquence de la non-commutativité des observables, en général pour deux observables $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ on a

$$[A, B] = AB - BA \neq 0$$

$[A, B]$ est appelé commutateur de A et B .

Soit $\{a_i\}_i = Sp(A)$ et $\{b_j\}_j = Sp(B)$ les valeurs propres de A et de B que l'on supposera toutes non-dégénérées. On note $\{\phi_{a_i}\}_i$ et $\{\phi_{b_j}\}_j$ les vecteurs propres associés. Ces deux ensembles de vecteurs sont différents, car sinon

$$\begin{aligned} \forall i, (AB - BA)\phi_i &= A(b_i\phi_i) - B(a_i\phi_i) \\ &= b_iA\phi_i - a_iB\phi_i \\ &= b_ia_i\phi_i - a_ib_i\phi_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

où on a noté $\phi_i = \phi_{a_i} = \phi_{b_i}$. Cette dernière relation étant vraie pour tout vecteurs propres ϕ_i . L'ensemble de vecteurs propres étant une base de \mathcal{H} , on aurait alors $AB - BA = 0$. Donc si les opérateurs ne commutent pas, les deux ensembles de vecteurs propres sont nécessairement différents.

Soit $\psi \in \mathcal{H}$ un état quelconque. Les vecteurs propres formant une base de \mathcal{H} on a

$$\psi = \sum_i c_{a,i} \phi_{a_i} = \sum_j c_{b,j} \phi_{b_j} \quad c_{a,i}, c_{b,j} \in \mathbb{C}$$

avec

$$\psi = \sum_i |c_{a,i}|^2 = \sum_j |c_{b,j}|^2 = 1$$

Supposons que l'on mesure l'observable A sans avoir fait de mesure sur B , la probabilité d'obtenir comme résultat a_i est de $|c_{a,i}|^2$. Supposons maintenant que l'on mesure tout d'abord l'observable B et que l'on ait trouvé comme résultat b_j . Alors d'après la règle de projection de Born, après cette mesure l'état du système est

$$\psi_{apres} = \phi_{b_j} = \sum_i \langle \phi_{a_i} | \phi_{b_j} \rangle \phi_{a_i}$$

Si on mesure maintenant A , la probabilité de trouver a_i est maintenant de $|\langle \phi_{a_i} | \phi_{b_j} \rangle|^2 \neq |c_{a,i}|^2$ puisque

$$c_{a,i} = \sum_j c_{b,j} \langle \phi_{a_i} | \phi_{b_j} \rangle$$

Ainsi le résultat de la mesure de A dépend du fait que l'on ait ou pas mesuré B avant A . Les résultats des mesures dépendent de l'ordre dans lequel on procède à celles-ci.

On note $\langle A \rangle_\psi$ la moyenne de l'observable A dans l'état ψ :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \langle \psi | A | \psi \rangle \\ &= \sum_i |c_{a,i}|^2 a_i \end{aligned}$$

On note ΔA_ψ l'écart-type des résultats des mesures de A , que l'on considère comme l'incertitude sur le résultat de A

$$\Delta A_\psi = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}$$

Propriété 1 (Relation d'incertitude de Heisenberg). *Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux observables hermitiennes. Alors les incertitudes sur A et B sont reliées par la relation*

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\psi|$$

Preuve 1 (Relation d'incertitude de Heisenberg). *On pose $A' = A - \langle A \rangle$ et $B' = B - \langle B \rangle$. Soit $\phi = (A' + ixB')\psi$ avec $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle \geq 0 &\iff |\langle \psi | (A' + ixB') (A' + ixB') | \psi \rangle| \geq 0 \\ &\iff \langle (A')^2 \rangle + ix \langle [A, B] \rangle + x^2 \langle (B')^2 \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $\langle (B')^2 \rangle x^2 + i \langle [A, B] \rangle x + \langle (A')^2 \rangle$ doit donc toujours être positif, ce qui nécessite qu'il ne présente pas de racine réelle ou une seule racine double. Son discriminant doit donc vérifier

$$\Delta \leq 0 \iff \langle i[A, B] \rangle^2 - 4 \langle (B')^2 \rangle \langle (A')^2 \rangle \leq 0$$

En remarquant que $\langle (A')^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$, la propriété est démontrée

La signification de cette propriété est la suivante : si on s'arrange pour trouver un état ψ tel que ΔA_ψ soit très petit alors ΔB_ψ est très grand et A, B ne commutent pas. Si on veut avoir des mesures de très grandes précisions sur A , alors elles seront très dispersées sur B et réciproquement. On parle de principe d'incertitude de Heisenberg.

Quand on parle d'un état d'une particule quantique et que l'on décrit la fonction d'onde $\psi(x, t)$ nous utilisons la représentation position de l'état. L'opérateur position \hat{x} agit alors sur $\psi(x)$ d'une manière simple :

$$\hat{x}\psi(x) \equiv x\psi(x)$$

Autrement dit l'opérateur position agissant sur la fonction d'onde dépendant de x est simplement multiplié par x . L'opérateur impulsion dans la représentation de la position est donné par

$$\hat{p} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Cela revient à dire que lorsqu'il agit sur la fonction d'onde $\psi(x)$ on a :

$$\hat{p}\psi(x) \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Les observables quantiques $\hat{x} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ et $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ ne commutent pas :

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] \psi(x) &= \hat{x}\hat{p}\psi(x) - \hat{p}\hat{x}\psi(x) \\ &= -i\hbar x\psi(x)' + i\hbar \frac{d}{dx}(x\psi(x)) \\ &= -i\hbar x\psi(x)' + i\hbar x\psi(x) + i\hbar x\psi(x)' \\ &= i\hbar x\psi(x) \end{aligned}$$

Ainsi d'après la propriété 1 on a bien :

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

1.3 Équation du mouvement, position et impulsion

1.3.1 L'équation de Schrödinger

Postulat 5. *L'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

Où H est l'observable associée à l'énergie totale du système, obtenue à partir de la fonction de Hamilton classique (voir ci-dessous).

Lorsque la particule est placée dans un champ de potentiel $V(r)$, l'équation de Schrödinger devient :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) + qV(r, t)\psi(r, t)$$

Elle se réduit à :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t)$$

pour une particule libre pour laquelle le potentiel est nul ou constant.

Remarques :

1. C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans le temps. Par conséquent, elle détermine complètement la fonction d'onde $\psi(r, t)$ à tout instant si l'on connaît celle-ci à un instant initial t_0
2. L'équation de Schrödinger est linéaire, conformément au principe de superposition.

1.3.2 Règles de quantification canonique

Soit une particule d'espace de Hilbert $H \in \mathcal{O}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d\tau))$. Pour trouver les observables quantiques, il faut passer des observables classiques qui sont connus vers leurs équivalents quantiques, un procédé appelé *quantification*. Afin de quantifier les observables classiques, il existe une règle dite de quantification canonique : Le principe est le suivant

$$\begin{aligned} V(x, y, z, t) &\longmapsto V(x, y, z, t) \\ \vec{p} &\longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \end{aligned}$$

où V est une fonction de l'espace et du temps et $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement classique. Ainsi pour une particule de masse m et de charge q dans un champs électromagnétique de potentiels (V, \vec{A}) , l'hamiltonien classique

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}))^2 + qV(\vec{x})$$

devient l'hamiltonien quantique (l'observable énergie) $H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d\tau)$ qui agissant sur un état donne

$$H\psi(\vec{x}) = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{x}))^2\psi(\vec{x}) + qV(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

En l'absence de potentiel magnétique $\vec{A} = \vec{0}$ on trouve

$$\mathcal{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + qV\psi$$

1.3.3 Lagrangien et Hamiltonien en mécanique classique

Afin de préparer la démonstration de l'Hamiltonien classique nous allons donner quelques définitions de physique classique.

Définition 3 (Fonction de Lagrange et equation de Lagrange). *Soit un système de n particules dans lequel les forces dérivent d'une énergie potentielle notée $V(r_i)$. La fonction de Lagrange, de ce système est la fonction des $6n$ variables $\{x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ donnée par :*

$$\begin{aligned} L(r_i, \dot{r}_i) &= \mathcal{E}_c - V \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2 - V(r_i) \end{aligned}$$

De plus les equations du mouvement donnée par la mécanique Newtonienne sont identiques aux equations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned}$$

Où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$$

où $q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ sont des coordonnées généralisées.

Définition 4 (Fonction de Hamilton). *La fonction de Hamilton d'un système est :*

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L$$

Définition 5 (Potentiel vecteur du champ magnétique).

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Preuve 2 (Hamiltonien classique). *Dans un champ électromagnétique, la particule chargée est soumise à la force de Lorentz :*

$$F = q(E + v \wedge B)$$

La loi de Newton donne donc les équations du mouvement sous la forme :

$$m\ddot{r} = q(E + \dot{r} \wedge B)$$

On projette cette équation sur l'axe Ox

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \\ &= q \left[-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

D'après les formules de Lagrange on montre que :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + q\dot{r} \cdot A(r, t) - qV(r, t)$$

D'après la fonction de Lagrange on a :

$$p = m\dot{r} + qA(r, t)$$

En écrivant la fonction d'Hamilton on retrouve bien notre équation de départ :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(r, p, t) &= p \cdot \dot{r} - \mathcal{L} \\ &= p \cdot \dot{r} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q\dot{r} \cdot A(r, t) + qV(r, t) \\ &= p \cdot \frac{1}{m}(p - qA) - \frac{1}{2m}(p - qA)^2 - \frac{q}{m}(p - qA) \cdot A + qV \\ &= \frac{1}{2m}(p - qA(r, t))^2 + qV(r, t)\end{aligned}$$

Chapitre 2

Qubits, spin et intrication

Dans le chapitre précédent nous avons vu les principes fondamentaux ainsi que les postulats de la mécanique quantique. Dans ce chapitre nous allons donner une représentation des systèmes quantiques admettant un nombre fini d'états et appliquer ces postulats à des cas simples comme les particules de spin $\frac{1}{2}$ ou encore l'étude des systèmes à plusieurs niveaux d'états.

2.1 Bit quantique

2.1.1 Qubits

Le Bit, qui est un concept fondamental du calcul classique et de l'information classique, ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 1. Le calcul quantique est construit sur un concept analogue, le *Qubit* ou *Bit Quantique*. Il représente un système quantique à deux états de base notés : $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. La différence entre un bit classique et un qubit est que ce dernier peut se trouver dans un état *autre* que $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, d'après le postulat 1. Il est alors possible de former des combinaisons linéaires des états, souvent appelées *superpositions* :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle.$$

Avec α et β des nombres complexes et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Il est important de rappeler que la combinaison linéaire $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ fait partie des propriétés intrinsèques de la particule étudiée. Ainsi pour connaître l'état de l'électron, nous devons effectuer une mesure qui nous donne une information classique de bit 0 ou 1. Une simple mesure de $|\psi\rangle$ dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, nous donnera 0 avec une probabilité de $|\alpha|^2$, et 1 avec une probabilité de $|\beta|^2$. Un important aspect du processus de mesure est qu'il altère l'état du qubit : le nouvel état du qubit correspond au résultat de la mesure. Si le résultat de la mesure de $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ donne 0, alors après la mesure l'état du qubit sera $|0\rangle$, d'après le postulat 3.

2.1.2 Mesure d'un qubit dans un espace de Hilbert

Nous avons vu qu'un système à k états quantiques est décrit par une séquence de k nombres complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$ avec $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$. On peut donc écrire un système à k états quantiques comme le vecteur :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi d'après la définition d'un espace de Hilbert, la normalisation des amplitudes complexes signifie que l'état du système est un vecteur unitaire dans un espace vectoriel de dimension complexe k . On peut donc représenter géométriquement les états quantiques par des vecteurs dans un espace de Hilbert (voir ci dessous).

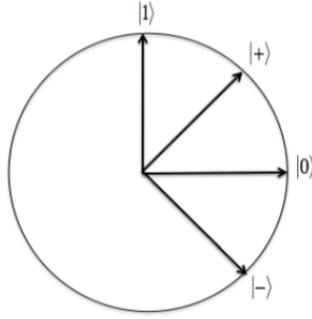


FIGURE 2.1 – Représentation de l'état d'un qubit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

Nous avons écrit précédemment un état quantique de la façon suivante : $\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \dots + \alpha_{k-1} |k-1\rangle$. Cette notation est en réalité une autre façon d'écrire les vecteurs, telle que :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |k-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Exemple de Qubits

Nous allons voir quelques réalités physiques du concept du qubit.

Les Orbitales atomiques Les électrons d'un atome existent dans des niveaux d'énergie quantifiés . On peut donc utiliser ces niveaux d'énergie pour configurer les états de base d'un qubit.

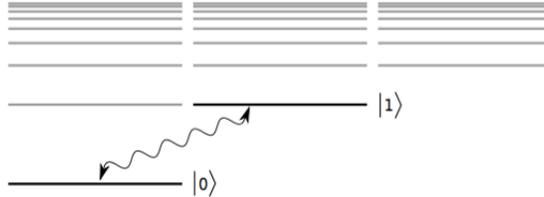


FIGURE 2.2 – Diagramme des niveaux d'énergies d'un atome. L'état fondamental et le premier niveau d'excitation correspondent au qubit $|0\rangle$ et $|1\rangle$

La polarisation Un photon est caractérisé par une onde électromagnétique qui est polarisée, c'est à dire que l'onde décrit des oscillations selon une certaine orientation (voir figure 2.2). Pour une direction d'un mouvement d'un photon donnée, la polarisation du photon se fait le long d'un axe perpendiculaire à un plan en deux dimensions. On peut donc prendre une base orthonormée en deux dimensions dans ce plan suivant deux axes x et y pour décrire la polarisation d'un photon. En mécanique quantique, la nature de la polarisation dans une base à deux dimensions représente un qubit.

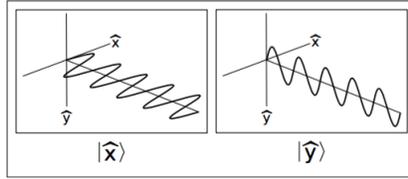


FIGURE 2.3 – Diagram de la polarisation d’un photon. La polarisation selon l’axe x est représentée $|0\rangle$, la polarisation selon l’axe y représente $|1\rangle$.

Le spin Comme pour la polarisation, le spin d’une particule est un système à deux états qui peut être utilisé pour décrire un qubit. Nous détaillerons comment observer et calculer le spin d’une particule ou d’un électron dans la section suivante.

2.2 Le spin

On caractérise les particules à l’aide de quantités physiques mesurables. La distinction entre deux particules de natures différentes se fait par rapport à ces quantités, c’est à dire que deux particules sont de natures différentes si et seulement si ces quantités caractéristiques sont différentes. Ces quantités appelées nombres quantiques internes, ne doivent donc pas dépendre de l’état dans lequel se trouve la particule, ni du référentiel dans lequel on la regarde. Le spin s est une quantité qui encode la notion de moment magnétique de la particule tel que $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\} = \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

2.2.1 L’expérience de Stern et Gerlach

La première mesure du moment magnétique propre à l’électron, le spin, est réalisée en 1921-1922 avec l’expérience de Stern et Gerlach. Un jet d’atomes d’argent, de vitesse bien définie, est envoyé dans une zone où règne un champ magnétique inhomogène dirigé suivant une direction d’axe z orthogonale à la vitesse initiale des atomes. On mesure la déviation éventuelle des atomes par ce gradient de champ magnétique en regardant l’impact des atomes sur un écran. L’atome d’argent a un électron externe, de moment cinétique orbital $\ell = 0$. Par conséquent, son moment magnétique est égal au moment magnétique propre de l’électron de valence.

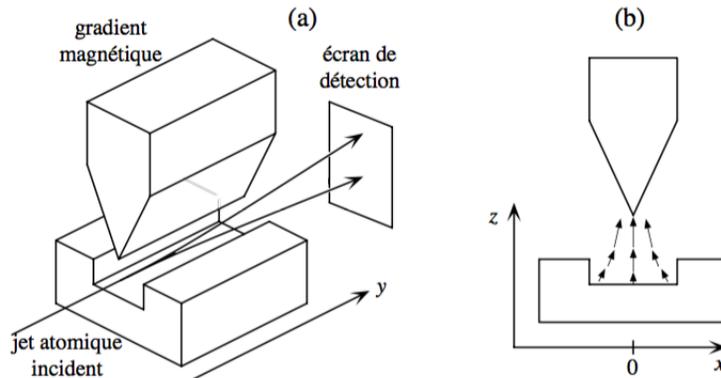


FIGURE 2.4 – (a) Expérience de Stern et Gerlach ; un jet d’atomes d’argent issu d’un four se clive en deux faisceaux lorsqu’il traverse une zone où règne un gradient de champ magnétique. Cette expérience peut être considérée comme une mesure de la composante du moment magnétique atomique, suivant la direction du champ magnétique (z sur la figure). (b) Gradient magnétique entre les pièces polaires de l’aimant.

2.2.2 Résultats expérimentaux

On constate qu'en l'absence de gradient de champ magnétique, on observe une tache unique sur l'écran de détection, au voisinage de $x = z = 0$. Le gradient de champ magnétique permet la mesure de la composante selon z , d'un éventuel moment magnétique des atomes. Supposons que les atomes portent tous un moment magnétique de norme μ_0 , et faisons l'hypothèse que ces moments ont une direction aléatoire quand les atomes entrent dans la zone de champ magnétique. On s'attend alors à ce que les points d'impacts sur l'écran forment un segment parallèle à z . Les deux extrémités du segment correspondent aux atomes dont les moments magnétiques sont orientés tels que $\mu_z = \pm\mu_0$.

Or, Stern et Gerlach ont observé un tout autre phénomène, les particules sont déviées dans deux directions symétriques par rapport à l'axe du jet. On en déduit que les particules sont dotées d'un moment magnétique intrinsèque qui n'existe que dans deux directions de l'espace, c'est le spin, ici de valeur $\frac{1}{2}$ et avec deux valeurs de projections possible sur l'axe du champ magnétique, $+\frac{1}{2}$ pour le haut "spin up" et $-\frac{1}{2}$ pour le bas "spin down".

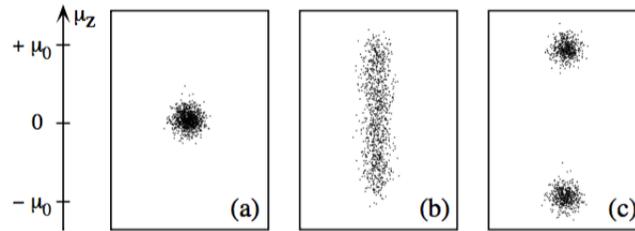


FIGURE 2.5 – Résultats possibles d'une expérience de Stern et Gerlach. (a) En absence de gradient magnétique, aucune modification des trajectoires atomiques ne se produit et les atomes forment une tache unique autour du point $x = z = 0$; chaque point représente l'impact d'un atome sur l'écran de détection. (b) Simulation du résultat attendu classiquement, en supposant que tous les atomes portent le même moment magnétique μ_0 avec une orientation aléatoire; la distribution de la composante selon z du moment magnétique est alors uniforme entre $-\mu_0$ et $+\mu_0$. (c) Simulation du résultat trouvé expérimentalement avec des atomes d'argent : l'expérience, qui peut être considérée comme une mesure de la composante selon z du moment magnétique, n'admet que deux résultats $\mu_z = \pm\mu_0$.

Dans le cas d'une particule de masse non-nulle $m > 0$, l'espace des états d'une particule de spin s , noté \mathcal{H}_s , est de dimension $2s + 1$ avec pour base orthonormée de l'espace des états de spin :

$$(|s, m_s\rangle, m_s = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s)$$

La quantité mesurable expérimentalement est $\hbar m_s$. La projection de spin est appelée m_s . L'état de spin $|s, m_s\rangle$ correspond à une particule de spin s dans un état où sa projection vaut m_s , s caractérise le type de particule, alors que m_s caractérise son état.

Pour les particules de masse nulle, la projection de spin ne peut prendre que deux valeurs, $m_s = \pm s$, il n'y a donc que deux états de spin $|s, +s\rangle$ et $|s, -s\rangle$

2.2.3 Représentation dans une base particulière

Définition 6 (Observable de spin). *On appelle projection de spin et carré de spin, les observables S_z et S^2 de $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ définies par :*

$$\begin{aligned} S_z |s, m_s\rangle &= \hbar s |s, m_s\rangle \\ S^2 |s, m_s\rangle &= \hbar^2 s(s + 1) |s, m_s\rangle \end{aligned}$$

Exemple : Si $s = \frac{1}{2}$, alors S_z a deux valeurs propres $m_s = \pm\hbar\frac{1}{2}$ ainsi que deux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.2.4 Représentation matricielle

Définition 7 (Matrice de Pauli). *On appelle matrice de Pauli, les matrices :*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour une particule de spin $\frac{1}{2}$, l'observable caractérisant la mesure de la projection de spin est $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$. Les observables $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ et $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ correspondent à la mesure du spin dans des directions différentes de l'axe principal z . Ce choix d'axe principal est purement arbitraire et est associé à la façon dont sont préparées initialement les particules (direction de polarisation initiale). Une autre observable importante est $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ qui mesure "le carré" du spin.

Les autres observables peuvent aussi être généralisées :

Définition 8 (Algèbre $\mathfrak{su}(2)$). *On appelle algèbre $\mathfrak{su}(2)$ un ensemble d'observables engendré par trois observables (S_x, S_y, S_z) telles que :*

$$[S_x, S_y] = S_z \quad [S_y, S_z] = S_x \quad [S_z, S_x] = S_y$$

En tant qu'opérateurs de \mathcal{H}_s ce sont des observables de spin d'une particule de spin s

Nous pouvons généraliser ces observables en prenant l'observable S_u le long du vecteur unitaire u , ce dernier étant caractérisé par les angles polaires θ et φ , s'écrit :

$$S_u = S_x \sin \theta \cos \varphi + S_y \sin \theta \sin \varphi + S_z \cos \theta$$

On a donc :

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \theta \sin \varphi \\ i \sin \theta \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Finalement on obtient :

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

2.2.5 Représentation dans la Sphère de Bloch

La sphère de Bloch est une représentation géométrique des états des qubits comme point de la surface d'une sphère. Cette représentation permet la résolution d'un grand nombre d'opérations élémentaires en informatique quantique.

Définition 9 (Sphère de Bloch). *L'état d'un qubit unique peut s'écrire de la manière suivante :*

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)$$

Avec θ , ϕ et γ des nombres réels tels que $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$, les valeurs θ et ϕ définissent un point dans une sphère unitaire en trois dimensions. C'est la sphère de Bloch. L'état d'un qubit avec une valeur arbitraire de γ est toujours représenté par le même point sur la sphère de Bloch, le facteur de $e^{i\gamma}$ n'a pas d'effets observables. On peut donc écrire :

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

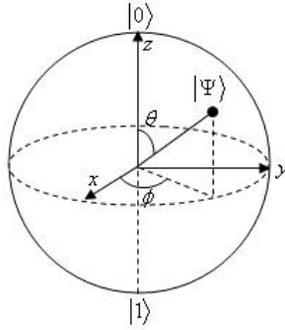


FIGURE 2.6 – Sphère de Bloch

Preuve 3. Sphère de Bloch

Prenons la décomposition d'un état d'un système quantique :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ainsi que la condition de normalisation $\langle \psi | \psi \rangle = \psi^* \psi = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Nous pouvons donc écrire le qubit sous forme :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |1\rangle \\ &= e^{i\phi_\alpha} (r_\alpha |0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |1\rangle) \end{aligned}$$

On peut montrer que multiplier l'expression par un facteur global $e^{i\gamma}$ n'a aucune influence sur les probabilités de mesurer $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$|e^{i\gamma} \alpha|^2 = (e^{i\gamma} \alpha)^* (e^{i\gamma} \alpha) = (\alpha^* \alpha) = |\alpha|^2$$

On peut donc multiplier notre état par $e^{-i\phi_\alpha}$

$$|\psi\rangle = r_\alpha |0\rangle + r_\beta e^{i(\phi_\beta - \phi_\alpha)} |1\rangle = r_\alpha |0\rangle + r_\beta e^{i\phi} |1\rangle$$

En rappelant que les coordonnées cartésiennes sont reliées aux coordonnées polaires, on peut noter :

$$|\psi\rangle = \cos \theta |0\rangle + \sin \theta e^{i\phi} |1\rangle$$

Enfin, comme $r_\alpha \geq 0$, alors $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ est suffisant pour décrire n'importe quel état quantique et donc tous les points de la sphère de Bloch. Finalement on a bien :

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

2.3 États à deux qubits

Supposons maintenant que nous avons un système à deux qubits. S'il y avait deux bits classiques, nous aurions quatre états possibles, 00, 01, 10, 11. Par conséquent, un système à deux qubits, a quatre états de base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Une paire de qubits peut alors se trouver dans une superposition de ces quatre états de base, que l'on peut écrire comme une combinaison linéaire :

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

Avec $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$ les amplitudes complexes.

La mesure du résultat de $x (= 00, 01, 10 \text{ ou } 11)$ est similaire à celle d'un qubit simple et se calcule avec une probabilité de $|\alpha_x|^2$. Ainsi l'état du qubit après la mesure devient $|x\rangle$. Pour un système à deux qubits, nous pouvons mesurer seulement un sous-ensemble du système. En étudiant le premier qubit, nous pouvons

deviner comment cela fonctionne : si nous mesurons seulement le premier qubit, nous trouverons 0 avec une probabilité de $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$, laissant l'état post-mesure :

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

Nous pouvons noter que l'état post-mesure est re-normalisé par le facteur $\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}$ ainsi, on satisfait les conditions de la norme d'un état quantique.

2.3.1 Produit tensoriel

Nous allons maintenant introduire la notion de produit tensoriel d'espace d'états qui va nous permettre de considérer l'ensemble de deux systèmes quantiques isolés, comme formant un système quantique unique. C'est ce principe que nous avons utilisé pour introduire l'équation (3.1) qui nous servira dans la partie sur l'intrication.

Définition 10 (Espace produit tensoriel \mathcal{E}). *Soit \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 deux espaces vectoriels de dimension n et m munis de base (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_m) .*

On définit le produit tensoriel $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ comme l'espace vectoriel de dimension $n \times m$ et engendré par la base

$$(e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_m, \dots, e_n \otimes f_m)$$

Un vecteur $V \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$V = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j,$$

2.3.2 Exemple de produit tensoriel

Nous allons imaginer la notion de produit tensoriel en montrant comment trouver l'état d'un système à 2 qubits. Soit $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ Alors on a :

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

2.4 Intrication

D'après l'exemple précédent, on peut se poser la question suivante : est ce que les états de deux qubits peuvent toujours se décomposer de la même manière ? On serait naturellement tenté d'affirmer que c'est toujours le cas. En effet chaque qubit doit être dans un certain état de la forme $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ et le nouvel état des deux qubits doit être le produit tensoriel.

En réalité, il y a des états comme $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ qui ne peuvent pas être décomposés de la même façon, comme l'état d'un premier qubit et celui d'un deuxième. De tels états sont appelés *états intriqués*. Lorsque deux qubits sont intriqués, on ne peut pas déterminer l'état de chaque qubit séparément.

Si le premier (respectivement le second) qubit de $|\Phi\rangle$ est mesuré alors la probabilité de trouver le résultat 0 est $\frac{1}{2}$ et la probabilité de trouver 1 est $\frac{1}{2}$. Or, si le résultat est 0, alors la mesure du second qubit est forcément 1. Et cela est vrai quelque soit la taille de la séparation spatiale entre les deux particules.

L'état $|\Phi\rangle$, que l'on appelle état de Bell, a une propriété très étrange et mystérieuse. L'anticorrélation entre le résultat de la mesure de deux qubits est la même quelque soit la rotation d'une base. Soit $|v\rangle, |v^\perp\rangle$ la base pivotée contenant les deux qubits, tel que $|0\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|v^\perp\rangle$ et $|1\rangle = -\beta|v\rangle + \alpha|v^\perp\rangle$, alors ont :

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\alpha|v\rangle + \beta|v^\perp\rangle) \otimes (-\beta|v\rangle + \alpha|v^\perp\rangle)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\beta|v\rangle + \alpha|v^\perp\rangle) \otimes (\alpha|v\rangle + \beta|v^\perp\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\alpha^2 + \beta^2)|vv^\perp\rangle + (\alpha^2 + \beta^2)|v^\perp v\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|vv^\perp\rangle + |v^\perp v\rangle) \end{aligned}$$

2.4.1 Protocole de téléportation quantique

La téléportation quantique consiste à pouvoir faire disparaître un état quantique en un point a et le faire réapparaître dans un autre point b de l'espace et ceci sans qu'il existe entre les deux points. Il faut noter que la matière de l'objet au point a ne disparaît pas mais la structure de l'objet oui. Au point b la matière de l'objet est déjà présente, mais elle n'a pas de structure. C'est seulement à la fin du processus de téléportation qu'elle acquiert toute cette structure. Ce processus est possible grâce à l'intrication quantique.

Nous allons d'écrire le protocole pour qu'Alice téléporte l'état $|\psi_A\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ de la particule A vers Bob. Alice et Bob s'arrangent pour avoir une paire de particules B et C de spin $\frac{1}{2}$ dans un état intriqué tel que :

$$|\psi_{BC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

1. L'état du système formé par les trois spins (A, B, C) dans $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ et s'écrit :

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_{BC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(|001\rangle - |101\rangle) + \beta(|010\rangle - |110\rangle))$$

On peut décomposer cet état sur la base des états de Bell :

$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad \text{et} \quad |\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$$

On obtient ainsi :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |\Psi_+\rangle \otimes (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) + \frac{1}{2} |\Psi_-\rangle \otimes (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) - \frac{1}{2} |\Phi_+\rangle \otimes (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) - \frac{1}{2} |\Phi_-\rangle \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)$$

C'est à dire :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[|\Psi_+\rangle \otimes (-|\psi_B\rangle) + |\Psi_-\rangle \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi_B\rangle + |\Phi_+\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi_B\rangle + |\Phi_-\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi_B\rangle \right] \quad (2.1)$$

Si Alice effectue une mesure de l'état de spin sur le couple de particules A et B , elle projette ses particules à un des états de Bell. La Particule de Bob se trouve dans un état lié à l'état initial.

2. Alice communique le résultat de la mesure à Bob, qui applique une transformation unitaire appropriée, correspondant à des rotations sur la particule C , pour obtenir l'état initial inconnu.

Si l'analyse de l'état de Bell d'Alice donne $|\Psi_+\rangle$ alors Bob n'a rien à faire.

Si l'analyse de l'état de Bell d'Alice donne $|\Psi_-\rangle$ alors Bob applique l'opération $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si l'analyse de l'état de Bell d'Alice donne $|\Phi_+\rangle$ alors Bob applique l'opération $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si l'analyse de l'état de Bell d'Alice donne $|\Phi_-\rangle$ alors Bob applique l'opération $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Durant le processus de téléportation, les valeurs α et β restent inconnues. Alice n'obtient pas d'information sur l'état quantique téléporté, cet état est simplement transféré à Bob via la mesure de l'état de Bell.

Chapitre 3

Paradoxe EPR, inégalité de Bell , CHSH game et Kochen-Specker : Localité et Contextualité

Pour une particule matérielle de spin $\frac{1}{2}$, l'espace de Hilbert associé au spin est $\mathcal{E}_{spin} = \mathbb{C}^2$. Lorsqu'on étudie un système de N particules, il faut considérer le produit tensoriel pour former l'espace $\mathcal{H} = \mathcal{E}_{spin}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_{spin}^N$. Cette structure d'espace produit tensoriel nous permet de créer des situations où les différents degrés de liberté sont corrélés : c'est l'intrication. Einstein, Podolsky et Rosen ont été les premiers à souligner le caractère paradoxal de l'intrication. C'est dans leur article de 1935, qu'ils utiliseront ce principe pour montrer l'opposition entre la mécanique quantique et la théorie réaliste de la localité du monde physique appelé paradoxe EPR.

3.1 Le Paradoxe EPR

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen mettent en avant une caractéristique de la mécanique quantique qui montre que cette théorie ne peut pas constituer une description parfaite du monde physique. C'est l'indéterminisme fondamental de la Mécanique Quantique, qui sera à l'origine du paradoxe EPR. Essayons de comprendre ce qu'est l'indéterminisme. On considère une particule de spin $\frac{1}{2}$ dans un état :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + |-z\rangle)$$

Si l'on fait une mesure dans la base $(|z, +\rangle; |z, -\rangle)$, on a $P(+\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$ et $P(-\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$ le résultat de la mesure est donc incertain.

On peut donc faire l'analogie de cet indéterminisme avec un tirage au sort classique, pile ou face. Mais avec une analyse approfondie des conditions initiales du système, à savoir la vitesse initiale, la masse, la surface... on peut prévoir le résultat de la face sur laquelle la pièce va tomber. Attribuer une probabilité de $\frac{1}{2}$ à l'événement pile ou face n'est qu'un schéma simplifié. En revanche pour une particule préparée dans un état initial, il n'est pas question, dans le cadre de la mécanique quantique, de disposer d'informations supplémentaires sur son état de spin qui prédétermine le résultat : $\pm\frac{\hbar}{2}$ sur la composante S_z .

L'indéterminisme de la mécanique quantique est en opposition avec les lois classiques de la physique. C'est ce qu'Einstein ne voulait pas admettre, d'où sa célèbre phrase "Dieux ne joue pas au dés". Einstein voulait trouver une super théorie dans le but de prévoir la mécanique quantique et donc de la rendre déterministe. Mais cette super Théorie peut-elle exister ? John Bell va découvrir qu'il est possible de mettre des contraintes sur les prévisions de la mécanique quantique. Elles aboutiront à des tests expérimentaux qui ont montré que la super théorie d'Einstein ne peut exister.

3.2 L'argument EPR

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la présentation de l'argument EPR présenté par David Bohm en 1952, plus simple à comprendre que la version initiale.

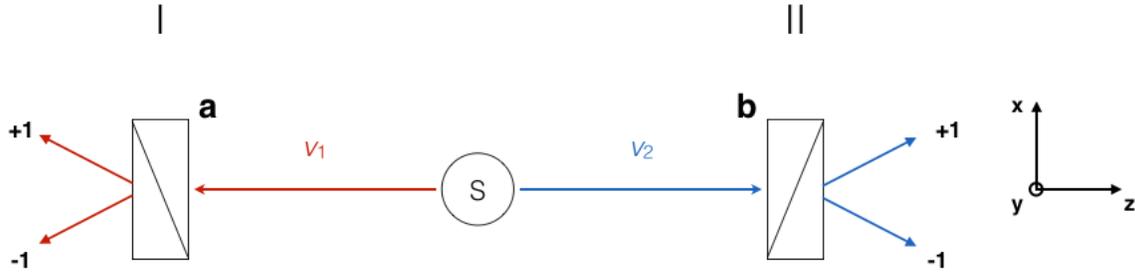


FIGURE 3.1 – Expérience de pensée de l'argument EPR

Deux photons v_1 et v_2 sont émis par la même source. On mesure la polarisation de v_1 selon l'orientation de a et la polarisation de v_2 selon l'orientation b . La mesure donne le résultat, soit $+1$ soit -1 . Si on répète N fois l'opération, on peut calculer la probabilité de trouver $+1$ ou -1 pour la source v_1 et $+1$ ou -1 pour la source v_2

Probabilité simple	Probabilité jointe
$P_+(a), P_-(a)$	$P_{++}(a, b), P_{+-}(a, b)$
$P_+(b), P_-(b)$	$P_{-+}(a, b), P_{--}(a, b)$

Supposons que l'on prépare deux particules 1 et 2, dans un état intriqué (ou EPR), on peut donc écrire l'état du système dans la base de polarisation ($|x\rangle; |y\rangle$) :

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle)$$

Nous allons calculer la probabilité jointe P_{++} que le photon d'Alice soit $+1$ pour la direction \hat{a} et celui de Bob $+1$ pour la direction \hat{b} . Nous nous intéressons au cas où \hat{a} et \hat{b} ont des orientations arbitraires. Nous pouvons utiliser l'invariance par rotation de $|\Phi\rangle$ pour choisir \hat{a} parallèle à l'axe Ox , tandis que l'angle entre Ox et \hat{b} est égal à θ . L'état $|x, \theta\rangle$ obtenu à partir de $|x\rangle$ par une rotation de θ autour de Oz est :

$$|x, \theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle$$

et le produit tensoriel $|x\rangle \otimes |x, \theta\rangle$ vaut :

$$|xx, \theta\rangle = \cos \theta |xx\rangle + \sin \theta |xy\rangle$$

L'amplitude de probabilité est donnée par le produit scalaire

$$\langle xx, \theta | \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

d'où la probabilité

$$P_{++} = |\langle xx, \theta | \Phi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \theta$$

Enfin par symétrie, nous pouvons déduire de cette équation :

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta \quad P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

Quand on calcule les probabilités d'observer $+1$ ou -1 on trouve, $P_+(a) = P_-(a) = \frac{1}{2}$ et $P_+(b) = P_-(b) = \frac{1}{2}$, quel que soit l'orientation de a ou de b . Les photons apparaissent donc comme non polarisés.

Mais quand on regarde les probabilités conjointes

$$P_{++}(a,b), P_{--}(a,b) = \frac{1}{2} \cos^2(a,b) \quad P_{+-}(a,b), P_{-+}(a,b) = \frac{1}{2} \sin^2(a,b)$$

Ce qui veut dire que si l'on met les deux polariseurs parallèles c'est à dire avec un angle nul, on obtient :

$$P_{++}(0) = P_{--}(0) = \frac{1}{2} \quad P_{+-}(0), P_{-+}(0) = 0$$

Il y a donc corrélation parfaite.

Il est important de noter que ce résultat se généralise à toutes situations de mesure en I et II selon le même axe. Si on prend un axe quelconque α , les mesures sont effectués sur $a = b = x$. L'état quantique s'écrit dans la base propre des observables $\hat{S}_{a\alpha}; \hat{S}_{b\alpha}$ en utilisant :

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\alpha\rangle + |-\alpha\rangle).$$

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\alpha\rangle - |-\alpha\rangle).$$

On obtient ainsi :

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha; \alpha\rangle - |-\alpha; \alpha\rangle).$$

Il y aura toujours corrélation parfaite quel que soit la base choisie.

Essayons d'imager cette l'expérience de pensée de l'argument EPR en supposant que l'on dispose de deux cartes, l'une rouge, l'autre jaune, et qu'on les place chacune dans une enveloppes. Après avoir mélangé les enveloppe, on en donne une à Alice et une l'autre à Bob. Quand Alice ouvre son enveloppe, elle découvre la couleur de sa carte : jaune avec une probabilité $1/2$ où rouge avec une probabilité $1/2$. Il y a évidemment une anti-corrélation parfaite avec le résultat ultérieur de Bob : si la carte d'Alice est rouge, celle de Bob est jaune et réciproquement. Il n'apparaît aucun paradoxe dans ces corrélations : la couleur de la carte d'Alice et celle de la carte de Bob sont tirées au sort au moment du mélange des enveloppes et ce n'est pas le fait qu'Alice prenne connaissance de la couleur de sa carte qui détermine la couleur de la carte de Bob. Ce point est au cœur d'une phrase clé de l'article EPR : "Lorsque sans perturber en quoi que ce soit un système, nous pouvons prédire avec certitude la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité physique"

Selon l'argument EPR, il y a un élément de réalité physique associé à la composante S_b puisque, sans modifier la particule b , on peut obtenir sa valeur selon la composante S_b . Pour cela, il suffit de demander à Alice de mesurer son système suivant la composant S_a et de dire à Bob son résultat. Comme il y a anti-corrélation, si Alice trouve $+1$, alors Bob trouvera -1 . Nous pouvons étendre notre raisonnement. En effet, s'il existe un élément de réalité physique à la composante S_{bx} on peut également en associer un a à la composante S_{by} . Bob peut alors, après mesure sur la composante S_{bx} , déterminer la composante S_{by} sans toucher à la particule b . Il suffit de demander à Alice de mesurer la composante S_{ay} . Or, ce raisonnement est contraire aux principes de la mécanique quantique. Si les particules a et b sont dans un état intriqué, on ne peut pas dire que l'on ne touche pas à b quand on effectue une mesure de a car notre système est bien $a + b$. Le raisonnement EPR pourrait s'appliquer pour des états factorisés, mais il n'y aurait plus de paradoxe, car il n'y aurait plus d'anti-corrélation entre les deux particules.

Deux positions se font faces, la description quantique, avec la non-localité paradoxale : les deux particules a et b , même éloignées l'une de l'autre, n'ont pas de réalité individuelle si leur état de spin est un état intriqué. Ce n'est qu'après qu'Alice ait mesuré S_a que la quantité S_b a acquit une valeur déterminée. Einstein espère que l'on trouvera un jour une théorie plus « complète » que la mécanique quantique, dans laquelle la notion de localité auras le même sens qu'en mécanique classique.

3.3 Inégalité de Bell

John Bell, physicien irlandais au CERN, est à l'origine de la "percée théorique" en 1964, qui amènera le débat de la physique quantique sur les bancs de l'expérimentation. Nous allons nous intéresser dans cette partie au raisonnement suivi par Bell qui est formulé ainsi : Si la super-théorie d'Einstein existe, elle fournira, pour chaque paire (a,b) du problème EPR décrit ci-dessus, un paramètre λ qui déterminera entièrement le résultat de la mesure d'Alice et de celle de Bob. Pour l'instant, nous ignorons tout du paramètre λ (variable cachée).

Soit λ appartenant à l'espace Λ , il doit exister une fonction $A(\lambda, a) = \pm 1$ pour Alice et $B(\lambda, b) = \pm 1$ pour Bob, donnant le résultat de la mesure sur I et II.

Introduisons l'espérance $E(a, b)$ une fonction de corrélation qui est égale à la valeur moyenne du produit des résultats d'Alice et de Bob, pour les directions d'analyse a et b données.

On remarque que :

$$|E(a, b)| \leq 1.$$

Pour une théorie à variables cachées, la fonction $E(u_a, u_b)$ peut s'écrire :

$$E(u_a, u_b) = \int P(\lambda) A(\lambda, u_a) B(\lambda, u_b) d\lambda,$$

où la fonction $P(\lambda)$ décrit la loi de répartition de la variable λ , avec pour condition sur P :

$$\forall \lambda, P(\lambda) \geq 0 \text{ et } \int P(\lambda) d\lambda = 1$$

Le théorème de Bell s'énonce alors de la manière suivante :

1. Pour une théorie à variable cachée locale

Il démontre qu'il y a une certaine quantité S qui est la combinaison de quatre coefficients de corrélation que l'on mesure en prenant deux orientations possibles sur I, a ou a' et deux orientations sur II, b ou b' tel que :

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$$

Qui satisfait toujours l'inégalité :

$$|S| \leq 2$$

2. Cette inégalité peut être violée par les prévisions de la mécanique quantique.

Dans le cadre de la prédiction de la mécanique quantique on a :

$$E_{MQ}(a, b) = \frac{1}{2} [2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta] = \cos 2\theta$$

Faisons maintenant le choix suivant pour l'axe des deux mesures : \hat{a} est parallèle à \hat{x} , \hat{b} fait un angle de $-\frac{\pi}{8}$ avec \hat{x} , \hat{a}' un angle de $\frac{\pi}{4}$ et \hat{b} un angle de $\frac{\pi}{8}$. Les différentes valeurs moyennes sont données par :

$$E(a, b) = E(a', b) = E(a', b') = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad E(a, b') = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La combinaison S de ces valeurs moyennes vaut $2\sqrt{2}$ en mécanique quantique

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') = 2\sqrt{2}$$

$$S_{MQ} = 2\sqrt{2} = 2.828... > 2$$

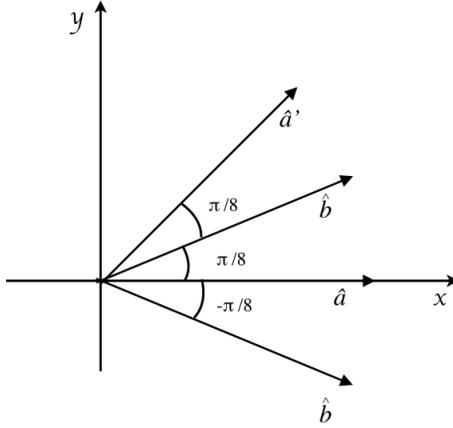


FIGURE 3.2 – Choix des orientations qui viole le borne S de la mécanique classique

On peut montrer que le choix des orientations de la figure ci-dessus donne la valeur maximale de S . Cette valeur viole la borne $S < 2$ prévue en mécanique classique. La mécanique quantique est donc incompatible avec les inégalités de Bell, et donc avec l'hypothèse de réalisme local.

Remarque : C'est l'équipe d'Aspect, Dalibard et Roger qui apportera les preuves expérimentales permettant d'éclaircir ce débat.

3.4 CHSH game

Deux joueurs, Alice et Bob sont isolés l'un de l'autre avant que le jeu ne commence. Le jeu commence lorsque l'arbitre sélectionne deux bits x et y aléatoirement et de façon uniforme. L'arbitre envoie x à Alice et y à Bob. Alice et Bob ne peuvent pas communiquer entre eux. Alice renvoie un bit a et Bob renvoie un bit b . Comme ils sont séparés dans l'espace, la réponse d'Alice ne peut pas dépendre du bit d'entrée y de Bob, de même la réponse de Bob ne peut pas dépendre du bit d'entrée x d'Alice. Après avoir reçu les réponses a et b l'arbitre détermine si le jeu est gagné ou non.

Conditions de victoire : Alice et Bob gagnent le jeu si : $x \cdot y = a \oplus b$

$$x = y = 1 \quad \text{et} \quad a \neq b$$

$$x = 1, y = 0 \quad \text{et} \quad a = b$$

$$x = 0, y = 1 \quad \text{et} \quad a = b$$

$$x = 0, y = 0 \quad \text{et} \quad a = b$$

Alice	Bob
$x \in \{0, 1\}$	$y \in \{0, 1\}$
$a \in \{0, 1\}$	$b \in \{0, 1\}$

FIGURE 3.3 – Représentation du jeu CHSH. L'arbitre distribue les bits x et y à Alice et Bob au premier tour. Au deuxième tour, Alice et Bob retournent les bits a et b à l'arbitre

Il existe une probabilité de distribution conditionnelle $P_{AB|XY}(a, b|x, y)$, qui correspond à la stratégie particulière qu'Alice et Bob utilisent. Comme les entrées x et y sont choisies aléatoirement et uniformément, elles peuvent chacune prendre deux valeurs possibles. Ainsi :

$$P_{XY}(x, y) = \frac{1}{4}$$

Donc la probabilité de gagner le CHSH game peut s'exprimer de la façon suivante :

$$P_{CHSH} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 (P(a \oplus b = xy|x, y))$$

Où \oplus est l'addition modulo 2

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$$

Considérons une stratégie déterministe qui pour chaque choix de x et y donne a_x et b_y . Le tableau suivant présente les conditions gagnantes pour les quatre valeurs différentes de x et y avec cette stratégie déterministe :

x	y	xy	$= a_x \oplus b_y$
0	0	0	$= a_0 \oplus b_0$
0	1	0	$= a_0 \oplus b_1$
1	0	0	$= a_1 \oplus b_0$
1	1	1	$= a_1 \oplus b_1$

On peut observer qu'il est impossible pour Alice et Bob de toujours gagner. En effet, en analysant le tableau ci-dessus, on remarque que ces quatre équations sont incompatibles : en prenant leur somme, le membre de gauche vaut un, le membre de droite zéro. Au maximum trois équations sur quatre sont compatibles. Par conséquent, il est impossible de satisfaire l'ensemble de ces équations. Seulement trois sur quatre peuvent être satisfaites, de sorte que la probabilité de gain maximal avec une stratégie déterministe classique est au plus $\frac{3}{4}$:

$$P_{CHSH} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 (P(a \oplus b = xy|x, y)) \leq \frac{3}{4}$$

On peut alors voir, qu'une stratégie pour d'atteindre cette limite est de répondre toujours $a = 0$ et $b = 0$, peu importe les valeurs d'entrées de x et y .

Décrivons maintenant la stratégie quantique qui va nous permettre d'atteindre un niveau de corrélation plus important. Supposons maintenant qu'Alice et Bob partagent un état intriqué :

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

et soit $R(\theta)$ l'opérateur de rotation autour de l'axe O_y tel que :

$$\begin{aligned} R(\theta) |0\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ R(\theta) |1\rangle &= -\sin \frac{\theta}{2} |0\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle \end{aligned}$$

Avant d'effectuer leurs mesures, Alice et Bob appliquent cette rotation sur leurs états respectifs avec un angle θ_a pour Alice et θ_b pour Bob. On peut calculer l'état $|\Phi'\rangle$ après la rotation.

$$\begin{aligned} |\Phi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (R(\theta_a) |0\rangle \otimes R(\theta_b) |0\rangle + R(\theta_a) |1\rangle \otimes R(\theta_b) |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\theta_a + \theta_b}{2} (|00\rangle - |11\rangle) + \sin \frac{\theta_a + \theta_b}{2} (|01\rangle - |10\rangle) \right) \end{aligned}$$

Si Alice et Bob décident de prendre $\theta_a = \theta_b = \frac{-\pi}{8}$ lorsque $x, y = 0$ et $\theta_a = \theta_b = \frac{3\pi}{8}$ si $x, y = 1$, on peut montrer que la probabilité de succès est de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$.

En effet on peut voir d'après $|\Phi\rangle$ que la probabilité qu'Alice et Bob répondent $a = b$ est égale afin de satisfaire l'équation $a \oplus b = 0$ est de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$

Dans le dernier cas où $x, y = 1$ et la mesure des angles d'Alice et Bob est effectuée avec un angle de $\frac{3\pi}{8}$ chacun. Alors la probabilité qu'ils répondent différemment est de $\sin^2 \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$. Donc dans chacun des quatre cas possibles, la chance qu'Alice et Bob réussissent est de $\cos^2 \frac{\pi}{8} = 0,85$.

3.5 Théorème de Bell-Kochen-Specker

Un autre théorème a été introduit par J.Bell ainsi que par Kochen et Specker en 1987. Celui ci n'a pas de relation particulière avec la localité mais se fonde sur un autre principe, la "contextualité". Une variable supplémentaire attachée à un système physique est appelée "contextuelle" si sa valeur dépend de la quantité physique qu'elle décrit, ainsi que des autres quantités physiques qui peuvent être mesurées simultanément sur le même système. En cas contraire elle est dite "non contextuelle". La variable décrit alors une propriété intrinsèque du système physique et non pas une propriété combinée du système et de l'appareil de mesure, comme décrit par Bohr (voir chapitre 1).

Nous allons essayer d'expliquer ce concept dans le cadre de la mécanique quantique. Supposons que nous ayons deux ensembles d'opérateurs hermitiens, en prenant deux particules de spin $\frac{1}{2}$. Intéressons-nous à la représentation de Mermin qui considère deux particules de spin $\frac{1}{2}$ ainsi que le tableaux de 9 observables quantiques :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x^1 & \sigma_x^2 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 & \sigma_y^1 & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \\ \sigma_x^1 \sigma_y^2 & \sigma_x^2 \sigma_y^1 & \sigma_z^1 \sigma_z^2 \end{array}$$

FIGURE 3.4 – Carré de Mermin

Rappelons rapidement les propriétés de ces opérateurs vu dans le chapitre 2. Tout ces opérateurs ont pour valeurs propres ± 1 . Les trois opérateurs d'une même ligne commutent entre eux, ainsi que les trois opérateurs d'une même colonne. Enfin le produit des trois observables dans la colonne de droite est $-I_d$ et le produit des trois observables dans les deux autres colonnes et les trois lignes, est $+I_d$.

La question qui se pose est alors : pouvons-nous attribuer une valeur ± 1 à chacun des éléments du tableau, de telle sorte d'obtenir une configuration en accord avec la mécanique quantique ?

Pour arriver à cette condition de cohérence on remarque que chaque ligne ou chaque colonne doivent contenir soit trois valeurs $+1$, soit un $+1$ et deux -1 , sauf la dernière colonne qui doit contenir un -1 ou trois -1 .

Si on fait le produit des lignes et des colonnes chaque nombre apparait 2 fois donc le produit des valeurs propres donne $+1$. Par contre si on multiplie les opérateurs de chaque lignes et chaque colonnes on obtient $-I_d$. Nous avons donc une contradiction de signe, il est alors impossible de trouver 9 nombres qui satisfassent toutes les conditions.

Ce théorème met en évidence que toute théorie à variables cachées est selon la physique quantique, contextuelle. C'est-à-dire que les valeurs mesurées des observables dépendent nécessairement du contexte expérimental, et non des entités physiques seules. Ce théorème contredit la vision réaliste d'Einstein, qui supposait que chaque entité physique a une existence, indépendante de son environnement et de l'observation.

Bibliographie

- [1] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2010.
- [2] Jean-Louis Basdevant, *12 leçons de mécanique quantique*. Vuibert, 2006.
- [3] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanique quantique*, Tome I, Hermann, 1998.
- [4] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanique quantique*, Tome II, Hermann, 1998.
- [5] David Viennot, *Master Physique et Physique Numérique - Mécanique quantique*.
- [6] Y. Leroyer, *Introduction à l'information quantique*, ENSEIRB-MATMECA, 2013.
- [7] Frédéric Faure, *Notes de cours sur la Mécanique quantique*, Université Joseph Fourier, Grenoble, Master Physique M1, 2015.
- [8] Alain Aspect, *Présentation « naïve » des inégalités de Bell*, Institut d'Optique Théorique et Appliquée, 2004.
- [9] Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard, *Mécanique quantique*, Cours de l'école polytechnique, 2002.
- [10] J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics Vol. 1, No. 3, pp 195-290, 1964.
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical review, Volume 47 1935.
- [12] N. David Mermin, *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, Laboratory of atomic and solid state physique, Cornell University, Rev. Mod. Phys., Vol. 65, No. 3 1993
- [13] Franck Laloë, *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique*, CNRS édition / EDP sciences, 2011.
- [14] Michelle Le Bellac, *Physique quantique*, 2E édition, CNRS édition, 2007. .
- [15] Vincent Jacque, *Sources de photon uniques et interférence à un seul photon, de l'expérience des fentes d'Young au choix retardé* , Thèse de Doctorat ENS Cachan, 2007.
- [16] Umesh V. Vazirani, *Quantum Mechanics and Quantum Computation*, edx.org, <https://www.edx.org/course/quantum-mechanics-quantum-computation-uc-berkeleyx-cs-191x>.