

MÉMOIRE EN VUE DE LA VALIDATION DE L'UNITÉ DE VALEUR

AC20 - AQUISITION DE CONNAISSANCES

Étude de systèmes dynamiques non déterministes

Auteurs :

Théo DURR

Célian HUMBERT

Enseignant chercheur encadrant :

Frédéric HOLWECK



UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE
BELFORT-MONTBÉLIARD

Printemps 2021

Avant-propos

On entend souvent parler du chaos comme l'absence d'ordre ou de logique, comme une force mystérieuse qui rendrait aléatoire et imprédictible certains événements et façonnerait le monde sans que l'on puisse vraiment comprendre comment et pourquoi. Le chaos est également souvent associé avec l'effet papillon qui explique qu'un changement imperceptible peut avoir des conséquences de proportion complètement différentes.

Ce sont sans doute l'image populaire, le mystère et l'aspect universel du chaos qui nous ont poussé à nous intéresser à ce sujet, et à vouloir acquérir de plus amples connaissances à son propos, de plus il s'agit d'un sujet très intéressant car l'étude des phénomènes chaotiques est un champ de recherche relativement récent qui touche à de très nombreux domaines et permet d'appréhender le monde d'une manière nouvelle et différente. Pour se faire, nous avons utilisés diverses méthodes, évidemment nous avons mené de nombreuses recherches sur le sujet afin de ce familiariser avec lui et d'avoir une meilleure idée de son ampleur et des différents domaines où l'on peut retrouver l'intervention du chaos.

Evidemment, l'étude de la théorie du chaos dans son ensemble nous est inaccessible de part sa complexité et ses applications très nombreuses. Nous avons donc fait le choix d'étudier des phénomènes mathématiques et physiques relativement simples où l'on peut retrouver la marque du chaos. Ses études passent bien sûr par une analyse mathématique mais également par la construction de graphiques à l'aide d'algorithmes que nous avons écrit afin de mettre en application notre compréhension et nos connaissances de ces phénomènes.

Remerciements

Nous tenons à remercier monsieur Frédéric Holweck enseignant chercheur à l'UTBM qui a accepté de nous encadrer et de nous guider tout au long de ce projet, en nous permettant d'accéder au monde du chaos, un univers très enrichissant.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Fonction logisitque	6
2.1	Analyse graphique & expérimentation numérique	6
2.1.1	Etude générale	6
2.1.2	Etude de la version discrète	6
2.1.3	Sensibilité aux conditions initiales	7
2.2	Étude mathématique	7
2.2.1	Étude du cas : $\lambda \leq 1$	7
2.2.2	Étude du régime stationnaire : $1 < \lambda < 3$	10
2.2.3	Étude d'un cycle d'ordre 2 : $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$	11
2.3	Le diagramme de bifurcation	12
3	Les attracteurs de Lorenz	13
3.1	Dimension mathématique	14
3.1.1	Equilibres du modèle	14
3.1.2	Stabilité des points d'équilibre	14
3.2	Observation graphique	15
3.3	Dimension expérimentale	17
3.3.1	Description du dispositif	17
3.3.2	Lien avec l'attracteur de Lorenz	18
4	Les fractales	20
4.1	Fractale d'un diagramme de bifurcation	21
4.2	Fratacle de l'attracteur de Lorenz	21
5	Conclusion	22
	Table des annexes	23
A	Graphiques	24
A.1	Fonction logisitque	24
B	Codes python	25
B.1	Génération de la fonction logisitque	25
B.2	Génération des graphiques en toile d'araignée	26
B.3	Génération du diagramme de bifurcation	28
B.4	Génération d'un attracteur de Lorenz	29

6 Sources	30
6.1 Sites internet	30
6.2 Vidéos visionnées	30
6.3 Documents consultés	30

Chapitre 1

Introduction

Au travers de nos recherches, nous avons essayé de comprendre et d'étudier le chaos, ou appelés mathématiquement les systèmes dynamiques non déterministes.

Bien que cet énoncé puisse paraître compliqué, il désigne simplement tout système dynamique dont on ne peut pas déterminer précisément l'évolution sans une connaissance parfaite de ses conditions initiales, il s'agit de la principale caractéristique des systèmes chaotiques. Nous avons notamment étudié deux célèbres systèmes exhibant ces caractéristiques : La fonction logistique, ainsi que les célèbres équations de Lorenz qui sont l'un des « point de départ » de la théorie du chaos et à qui sont également à l'origine de l'expression "effet papillon".

L'origine de ce nom vient d'une de ses conférences concernant ses travaux, et qui avait pour titre "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?" (Traduit par « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas? »). Nous essayerons d'apporter des éléments de réponse à cette célèbre question. Les deux systèmes mentionnés précédemment présentent une forte dépendance aux conditions initiales, mais ils possèdent une autre caractéristique que l'on retrouve souvent dans les systèmes chaotiques : ils possèdent une dimension fractale. Vous trouverez donc tout au long de ce document l'analyse et l'explication du comportement de ses systèmes afin de mieux comprendre ce qu'est "scientifiquement" le chaos.

Chapitre 2

Fonction logisitque

Cette fonction a été introduite par Pierre François Verhulst (1804-1849). Il s'agit d'un modèle de croissance des populations proposé en réponse au modèle de Malthus, qui proposait un taux d'accroissement constant, sans frein conduisant à une croissance exponentielle de la population.

Si on note $t \mapsto x(t)$, la fonction qui représente la population au temps t . Le modèle de Malthus se traduit mathématiquement de la manière suivante : $x'(t) = x(t)$. Les solutions d'un tel modèle sont des **exponentielles**.

On peut voir ici que le modèle de Verhulst est plus fin : il prend en compte l'effet de « surpopulation » qui conduit à une raréfaction des ressources et donc à la diminution de la population. Mathématiquement, cela conduit à étudier la fonction $x' = \lambda x(1 - x)$: le taux d'accroissement diminue quand x augmente à cause du facteur $(1 - x)$.

Axiome 1 (La fonction logisitque (Verhulst)) Soit $\lambda \in [0; 4]$, on considère la fonction logisitque

$$f_\lambda : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow & [0; 1] \\ x & \longmapsto & \lambda x(1 - x) \end{cases}$$

Nous allons dans notre cas, étudier une version discrète de ce modèle, c'est-à-dire à l'aide de suites. Nous allons donc étudier l'évolution des suites récurrentes définies par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & [0; 1] \\ u_{n+1} & = & f_\lambda(u_n) \end{cases}$$

2.1 Analyse graphique & expérimentation numérique

2.1.1 Etude générale

2.1.2 Etude de la version discrète

On cherche à observer numériquement le comportement de la suite (u_n) . Pour cela, nous avons observé le comportement des 30 premiers termes de la suite, pour $u_0 = 0.5$ et $\lambda \in \{0, 5; 1, 5; 2, 5; 3, 2; 3, 5\}$.

On peut voir sur la figure 2.1 que pour les valeurs de $\lambda \in \{0, 5; 1, 5; 2, 5\}$, la suite (u_n) est convergente, et converge respectivement vers (environ) 0; 0,33 et 0,6. On peut déceler un comportement particulier pour les valeurs de $\lambda \in \{3, 2; 3, 5\}$: elles semblent converger périodiquement vers deux points. On peut trouver les suites extraites afin de donner une valeur approchée de leurs limites.

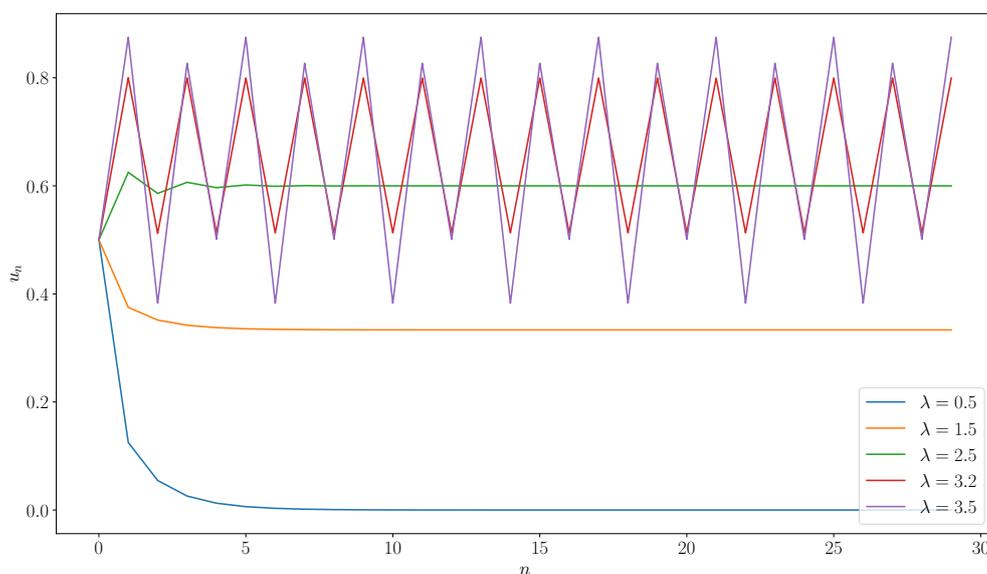


FIGURE 2.1 – Etude de la suite logistique pour différentes valeurs de λ

Pour $\lambda = 3, 2$, la suite des termes pairs (u_{2n}) converge vers approximativement 0,51. Tandis que la suite des termes impairs (u_{2n+1}) converge vers approximativement 0,80. De même pour $\lambda = 3, 5$ où, les limites des suites extraites sont (approximativement) 0,4 et 0,9.

2.1.3 Sensibilité aux conditions initiales

Pour cette partie, fixons $\lambda = 4$ et étudions la suite logistique avec $u_0 = 0,4$ et $u'_0 = 0,4 + 10^{-8}$. On remarque sur la figure 2.2 (page 8) que les courbes se superposent parfaitement jusqu'au 17^e terme. Au delà, les courbes commencent à se dissocier et se dissocient rapidement.

Cette partie illustre le fait que pour $\lambda = 4$, la suite (u_n) a une forte sensibilité aux conditions initiales. Une infime variation des conditions initiales (ici 0,00000001) a des conséquences énormes sur les résultats : le système est donc **chaotique**, et introduit la notion d'*effet papillon*.

2.2 Étude mathématique

2.2.1 Étude du cas : $\lambda \leq 1$

Durant toute cette partie, on supposera $\lambda \leq 1$.

En plus des études graphiques, nous allons maintenant nous intéresser à des preuves mathématiques validant les hypothèses que nous aurions pu émettre. Tout d'abord, nous aurons besoin des bornes de f_λ durant toute la suite de l'étude. Montrons donc que $f_\lambda([0; 1]) \in [0; 1]$:

Étudions la fonction $f_\lambda(x)$:

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) = \lambda x - \lambda x^2$$

Calculons son discriminant Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda^2 - 4 \times \lambda \times 0 \\ &= \boxed{\lambda^2 > 0} \end{aligned}$$

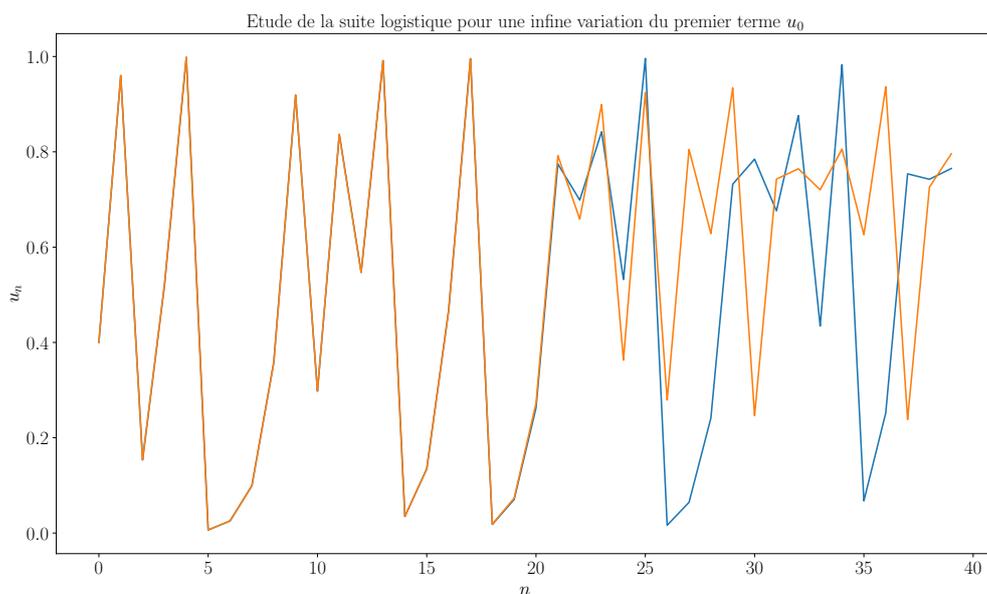


FIGURE 2.2 – Etude de la suite logistique pour une infime variation du premier terme u_0

Il existe donc deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2}}{-2\lambda} = \frac{-2\lambda}{-2\lambda} = \boxed{1}$$

$$x_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2}}{-2\lambda} = \boxed{0}$$

On voit donc que f_λ est **positive** sur l'intervalle $[0; 1]$. Calculons les coordonnées du sommet afin de s'assurer que son ordonnée ne soit pas supérieure à 1 :

Axiome 2 (Coordonnées du sommet d'une parabole) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Les coordonnées du sommet S de la courbe représentative de f sont

$$S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Notons, S_λ le sommet de la courbe représentative de f_λ . L'ordonnée de S_λ vaut :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}$$

Calculons les bornes de y en fonction de λ :

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\iff 0 \leq \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Comme $\frac{1}{4} < 1$, le sommet ne dépassera jamais 1. Donc $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. Cela ne pose pas non plus de soucis lorsqu'on étudie la version discrète à l'aide de suites, car comme $u_0 \in [0; 1]$ et que $f_\lambda([0; 1]) \subset [0; 1]$, alors $f_\lambda(u_n) = u_{n+1} \in [0; 1]$.

Nous voyons graphiquement que pour $\lambda \leq 1$, la suite semble converger vers 0. Prouvons cela mathématiquement en étudiant la monotonie de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \lambda u_n(1 - u_n) - u_n \\ &= u_n(\lambda(1 - u_n) - 1) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &u_n \leq 1 \\ \iff &1 - u_n \leq 1 \\ \iff &\lambda(1 - u_n) \leq 1 \\ \iff &\lambda(1 - u_n) - 1 \leq 0 \\ \iff &u_n(\lambda(1 - u_n) - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

La suite est donc **décroissante**. De plus, elle est minorée par 0. Elle est donc bien **convergente**. Il serait également intéressant de connaître la limite de la suite (u_n) , élément crucial afin de déterminer son comportement en fonction de λ .

Axiome 3 (Point fixe) *En mathématique, pour une application f d'un ensemble E dans lui-même, un élément x de E est un **point fixe de f** si*

$$f(x) = x$$

Graphiquement, les points fixes d'une fonction f (d'une variable réelle, à valeurs réelles) s'obtiennent en traçant la droite d'équation $y = x$: tous les points d'intersection de la courbe représentative de f avec cette droite sont alors les points fixes de f .

Axiome 4 (Point fixe et convergence) *On considère une fonction continue $f : E \rightarrow E$ et (u_n) une suite récurrente définie par sa valeur initiale u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si (u_n) converge vers un élément l de E , la limite l est nécessairement un point fixe de f .

Afin de trouver la limite de la suite (u_n) , nous allons donc calculer les points fixes de f_λ pour $\lambda \leq 1$. C'est à dire, résoudre l'équation $f_\lambda(x) = x$:

$$\begin{aligned} &f_\lambda(x) = x \\ \iff &\lambda x(1 - x) - x = 0 \\ \iff &x(\lambda(1 - x) - 1) = 0 \\ \iff &-\lambda x(-(1 - x) + \frac{1}{\lambda}) = 0 \\ \iff &-\lambda x(x - 1 + \frac{1}{\lambda}) = 0 \\ \iff &-\lambda x(x - (1 - \frac{1}{\lambda})) = 0 \end{aligned}$$

Par déduction directe, on peut trouver les solutions de l'équation

$$f_\lambda(x) = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Cette équation a donc deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Or, $\lambda \leq 1$, donc $x_2 \leq 0$. x_2 n'est donc pas un élément de E , il ne s'agit donc pas d'un point fixe. Ainsi, pour $\lambda \leq 1$, la fonction f_λ possède un unique point fixe sur $[0, 1]$ qui est $x = 0$. Nous avons montré précédemment que la suite (u_n) tend vers une limite l . Par construction de (u_n) et par continuité de f_λ , on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_{n+1} \rightarrow l \\ f(u_n) \rightarrow f(l) \end{cases}$$

On en déduit donc que $l = f(l)$, c'est-à-dire que l est un **point fixe** de f_λ , et $l = 0$. La suite (et donc la fonction logistique) tendent bien vers 0, lorsque $\lambda \leq 1$. On peut d'ailleurs voir sur la figure 2.3 (appelé graphique en toile d'araignée) que l'escalier va au fur et à mesure vers 0. On dit que 0 est un **point fixe attractif**. Cela signifie que dès qu'un terme de (u_n) est dans le voisinage de ce point fixe, tous les termes suivants restent dans le voisinage et la suite converge vers ce point fixe. À l'opposé, un point fixe **répulsif** lorsque (u_n) va s'éloigner du voisinage considéré.

Mathématiquement, un point fixe est attractif lorsque $|f'_\lambda(x_0)| < 1$ et répulsif lorsque $|f'_\lambda(x_0)| > 1$.

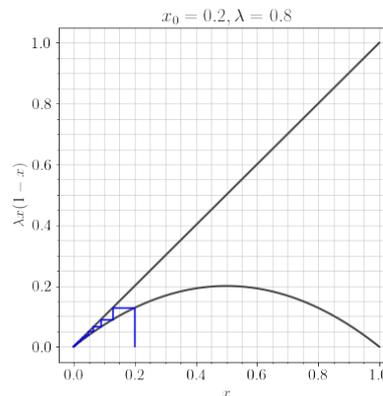


FIGURE 2.3 – $\lambda = 0.8$ et $u_0 = 0.2$

2.2.2 Étude du régime stationnaire : $1 < \lambda < 3$

Dans la section précédente, nous avons déterminé les points fixes de f_λ suivants : 0 et $1 - \frac{1}{\lambda}$. Cette fois-ci, pour $1 < \lambda < 3$, nous avons bien $0 \leq 1 - \frac{1}{\lambda} \leq 1$. On peut donc noter le point fixe $p_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$. La fonction admet donc bien deux points fixes :

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Intéressons nous maintenant à leur attractivité. Nous voyons bien graphiquement (figure 2.4) que, malgré le premier terme proche du point fixe 0, la suite converge vers 0,6. On peut donc supposer que 0 est répulsif et 0,6 attractif. Nous allons calculer mathématiquement les points fixes afin de confirmer cette hypothèse.

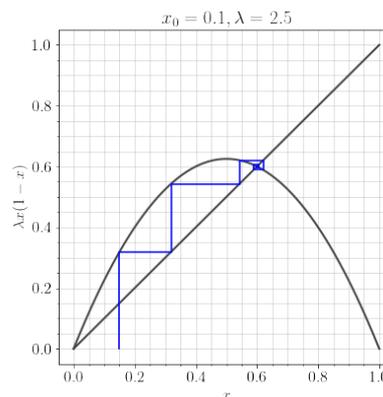


FIGURE 2.4 – $\lambda = 2.5$ et $u_0 = 0.1$

$$f'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$$

$$\begin{cases} |f'_\lambda(p_1)| = |\lambda| > 1 \\ |f'_\lambda(p_2)| = |2 - \lambda| < 1 \end{cases}$$

Donc, $p_1 = 0$ est bien **répulsif** et $p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda} = 0,4 = 0,6$ **attractif**. Ici, nous avons calculé les valeurs avec l'exemple en figure 2.4. Mais cela est valable pour tout λ compris entre 1 et 3 (strictement).

2.2.3 Étude d'un cycle d'ordre 2 : $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$

Nous rentrons dans un autre cas pour $\lambda > 3$, car p_λ devient **répulsif**. En effet, si $0\lambda = 3$, on a $|f'_\lambda(p_\lambda)| = |2 - \lambda| < 1$. Si nous regardons la figure 2.1, nous notons une oscillation entre deux valeurs, cela fait apparaître deux suites extraites convergentes, on dit qu'il y a un **cycle d'ordre 2** : la suite des termes de rang **pairs**, et la suite des termes de rangs **impairs**. Cela entre en cohésion avec le résultat trouvé lors de notre analyse graphique (section 2.1.2).

L'objectif est donc d'étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Or, $u_{2(n+1)} = f_\lambda(u_{2n+1}) = f_\lambda(f_\lambda(u_{2n}))$. De même que $u_{2(n+1)+1} = f_\lambda(f_\lambda(u_{2n+1}))$. On voit donc que l'étude de ces suites revient à étudier $f_\lambda \circ f_\lambda$.

Nous apercevons sur la figure 2.5 que 0 est toujours un point fixe, tout comme 0,69. Cela fait en effet sens, car les points fixes de f_λ sont aussi des points fixes de f_λ^2 . Si x est un point fixe de f_λ , on a $f_\lambda(f_\lambda(x)) = f_\lambda(x) = x$. En développant $f_\lambda \circ f_\lambda$, nous obtenons le polynôme suivant :

$$-\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + \lambda^2 x$$

On sait que 0 et $1 - \frac{1}{\lambda}$ sont des points fixes de f_λ^2 . Ce sont donc des racines du polynôme

$$P_\lambda(x) = -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + (\lambda^2 - 1)x$$

Sont (pour $\lambda = 3,2$) :

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} = 0,513045 \\ l_2 = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} = 0,799455 \end{cases}$$

Nous retrouvons les valeurs limites obtenues dans la section 2.1.2. Nous pourrions montrer que ces points fixes sont dans $[0; 1]$ et qu'ils sont stables.

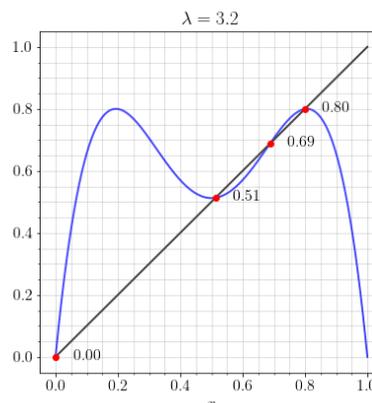


FIGURE 2.5 – $\lambda = 3,2$

2.3 Le diagramme de bifurcation

Si nous continuons d'augmenter λ , on obtient des cycles d'ordre 4, puis 8, etc... (Voir annexe A.1). On parle de cascade de doublement de période. Nous allons donc nous intéresser aux valeurs de passages à l'ordre de multiplicité 2 supérieur. Nous allons pour cela représenter un diagramme de bifurcation. Ce diagramme **représente la/les valeur(s) du/des point(s) fixe(s) en fonction de la valeur de λ** .

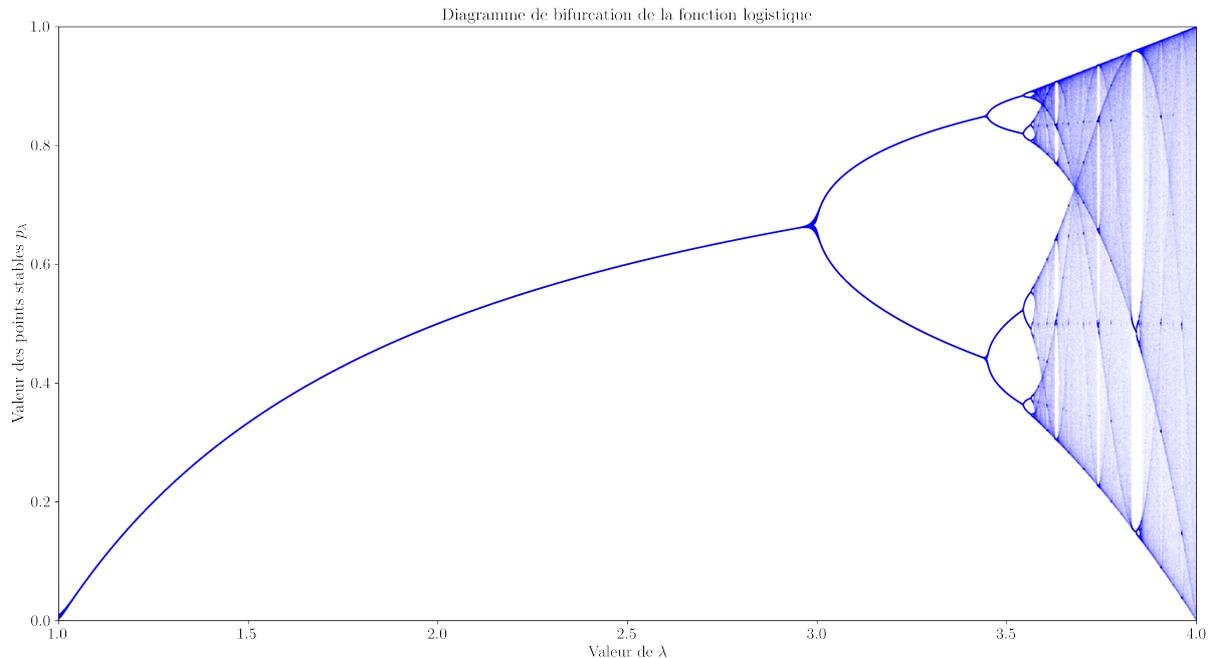


FIGURE 2.6 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique

Cela est cohérent avec ce que l'on a trouvé dans les parties précédentes. On peut cependant noter un changement brutal de comportement à partir de $\lambda = 3.57$. On entre dans un comportement complètement chaotique, sans aucune orbite périodique.

Chapitre 3

Les attracteurs de Lorenz

Tout d'abord commençons par définir rapidement et sans rentrer dans les détails mathématiques ce qu'est qu'un attracteur.

Il s'agit d'un ensemble ou d'un espace vers lequel un système dynamique évolue de manière irréversible en l'absence de perturbation, le concept d'attracteur est l'une des bases de la théorie du chaos. Dans cette partie nous allons nous concentrer sur l'attracteur de Lorenz. Il s'agit d'un attracteur représentant l'évolution du système dynamique différentiel de Lorenz. Cet attracteur est caractérisé d'attracteur étrange, cela signifie qu'il n'est pas continu, mais formé point par point par la dynamique du système.

Le système de Lorenz s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \sigma[y - x] \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{cases}$$

Ces équations sont un modèle très simplifié créées par Lorenz pour modéliser le fonctionnement de l'atmosphère terrestre. Il a décidé de chercher un modèle simple car les équations décrivant l'atmosphère de façon précise était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement à l'époque de Lorenz et il souhaitait pouvoir étudier le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard à l'aide de son modèle simplifié. Lors de l'étude de ce modèle il remarquera que certaines valeurs des paramètres donnent un comportement chaotique au système.

Dans ces équations :

- σ correspond au nombre de Prandtl, il s'agit d'un nombre sans dimension obtenu en calculant le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement d'une entité et ça diffusivité thermique.
- ρ correspond au nombre de Rayleigh, il s'agit d'une valeur utilisé en mécanique des fluides, il permet de caractérisé le transfert de chaleur au sein d'un fluide.
- β est une valeur dépendant de la couche de l'atmosphère dans laquelle on se place
- x , y et z représentent l'état du système au court du temps, remis dans leur contexte physique, x est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, y est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et z est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire.

3.1 Dimension mathématique

3.1.1 Equilibres du modèle

Nous allons nous intéresser aux points auxquels le modèle est stable, c'est-à-dire les points d'équilibre (x, y, z) vérifiant $x' = y' = z' = 0$, cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ x(\rho - z) - y = 0 \\ xy - \beta z = 0 \end{cases}$$

Avec σ , ρ et β des réels positifs.

On remarque que $x = y = z = 0$ est une solution évidente de ce système quelque soit les valeurs de σ , ρ et β . A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on résoud ce système et l'on trouve des solutions dépendant de σ , ρ , β et particulièrement de la valeur de ρ , en effet :

Si $\beta(\rho - 1) \geq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ y = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ z = \rho - 1 \end{cases}$$

autrement dit lorsque $\rho \geq 1$ le système admet 3 points d'équilibre à savoir :

$$(\sqrt{\beta(\rho - 1)}; \sqrt{\beta(\rho - 1)}; \rho - 1), (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}; -\sqrt{\beta(\rho - 1)}; \rho - 1)$$

et $(0, 0, 0)$ dans le cas où $\rho < 1$ il admet un seul point d'équilibre à savoir $(0, 0, 0)$

3.1.2 Stabilité des points d'équilibre

Les points d'équilibre trouvés précédemment ne sont pas toujours stables, l'équilibre peut être stable ou instable, les conditions de stabilité de ses points sont déterminées par l'étude du signe de la partie réel des valeurs propres de la matrice jacobienne A obtenue en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre, cette partie étant trop technique pour nous, on se permet d'admettre l'expression de la matrice jacobienne A et l'on se contentera d'expliquer globalement la méthode utilisé sans rentrer dans les détails, car la méthode utilisée fait appel à des notions d'étude de stabilité des équilibres que nous ne maîtrisons pas. On admet donc également que si le signe de toutes les valeurs propres est négatif, alors l'équilibre est stable et instable sinon. A a pour expression :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Intéressons nous à la stabilité du point d'équilibre $(0, 0, 0)$, on a alors :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont alors les solutions de

$$\det(A - \lambda) = (\sigma * \rho - (\lambda + 1) * (\lambda + \sigma)) * (\lambda + \beta) = 0$$

En résolvant, on trouve alors trois solutions :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 = \frac{\sqrt{4 * \sigma * \rho + \sigma^2 - 2 * \sigma + 1} - \sigma - 1}{2} \\ y = \lambda_2 = \frac{-(\sqrt{4 * \sigma * \rho + \sigma^2 - 2 * \sigma + 1} + \sigma + 1)}{2} \\ z = \lambda_3 = -\beta \end{cases}$$

On constate que le signe de λ_1 et λ_2 dépend de ρ , en effet si $\rho < 1$ alors λ_1 est négative tout comme λ_2 et λ_3 , dans ce cas le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ est stable. Cependant, si $\rho > 1$, alors λ_1 est positive, donc l'équilibre n'est pas stable.

En procédant de façon similaire on peut déterminer la valeur critique de ρ pour laquelle l'équilibre des deux points non nul est instable. Ainsi si $\rho > \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}$, l'ensemble des points d'équilibres est instable et le système adapte un comportement particulier.

3.2 Observation graphique

Après avoir appréhendé l'attracteur de Lorenz sous sa forme mathématique, nous allons nous intéresser à sa représentation graphique. Les parties précédentes vont nous aider à comprendre. Pour représenter l'attracteur de Lorenz, nous avons écrit un programme python qui résoud le système différentiel de Lorenz en fonction du temps et de conditions initiales (à l'aide d'un solveur déjà existant) et nous avons affiché la courbe correspondante.

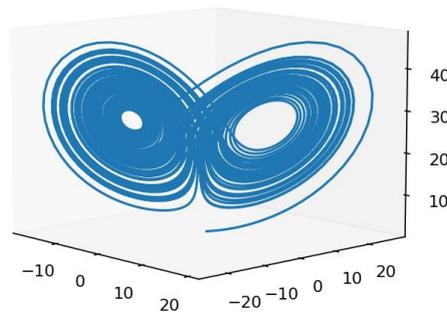


FIGURE 3.1 – Attracteur de Lorenz pour $\rho = 28$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$

On obtient un graphique en trois dimensions à l'allure étrange (Figure 3.1), les valeurs de ρ , σ et β sont les valeurs classiques utilisées pour représenter ce système car ce sont les valeurs historiques utilisées par Lorenz. Elle permettent d'exhiber son comportement chaotique. Les valeurs des conditions initiales sont, pour ce graphique $(1, 1, 1)$. Ce qu'on observe est en effet un attracteur, car quelque soit les conditions initiales, la trajectoire se retrouvera à évoluer dans la zone de l'attracteur. Essayons maintenant de comprendre pourquoi on obtient ce graphique. L'aspect de l'attracteur de Lorenz est en grande partie dû à la stabilité ou l'instabilité des points

d'équilibre dont nous avons parlé précédemment. Représentons l'attracteur pour $\rho = \frac{1}{2}$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$ (Figure 3.2).

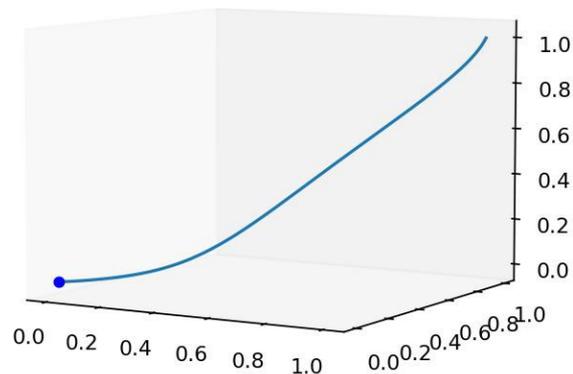


FIGURE 3.2 – Attracteur de Lorenz pour $\rho = \frac{1}{2}$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$

On constate que le système évolue vers le seul point d'équilibre stable $(0,0,0)$ car $\rho < 1$ représentons maintenant l'attracteur pour $\rho = 10$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$ (Figure 3.3)

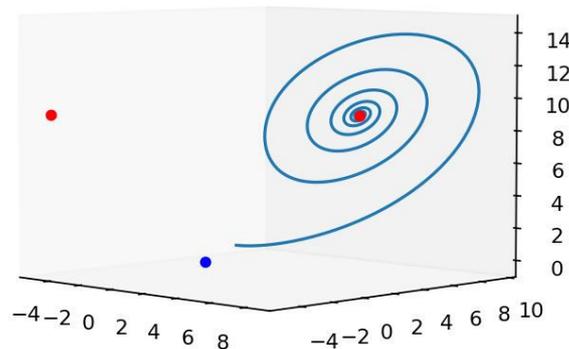


FIGURE 3.3 – Attracteur de Lorenz pour $\rho = 10$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$

On observe ici que le système évolue vers l'un des deux point d'équilibres représentés par des points rouges sur le graphique, cela s'explique car dans ce cas $\rho > 1$ donc le point $(0,0,0)$ représenté par le point bleu est instable, de plus $\rho < \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} = 24.74$ donc les deux autres point d'équilibre sont stable, le système évolue donc vers l'un ou l'autre dépendant de la valeurs de ρ et des conditions initiales.

Enfin représentons l'attracteur pour $\rho = 25$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$ (Figure 3.4).

Il n'est pas simple de comprendre ce qu'il se passe sur ce graphique, la valeur critique de $\rho = 24.74$ a été dépassé, alors il n'y a plus de point d'équilibre stable. Le système orbite donc autour de ses points d'équilibre instables passant de l'un à l'autre de façon imprédictible.

À l'aide d'un graphique, on peut également observer la forte dépendance aux conditions initiales qui caractérise les systèmes chaotiques. En traçant deux attracteurs avec une couleur différente sur le même graphique (Figure 3.5) et en changeant très légèrement l'une des trois conditions initiales (0.0000001 dans ce cas), on observe que les deux attracteurs ne se superposent pas.

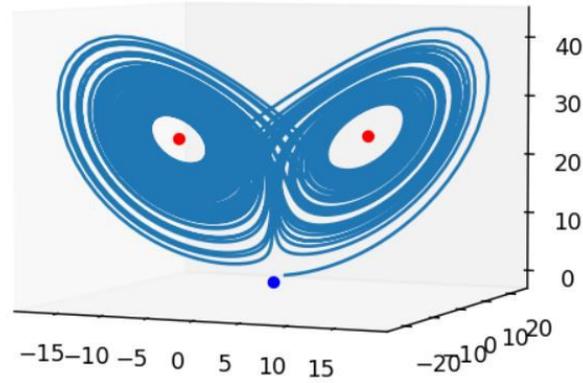


FIGURE 3.4 – Attracteur de Lorenz pour $\rho = 25$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$

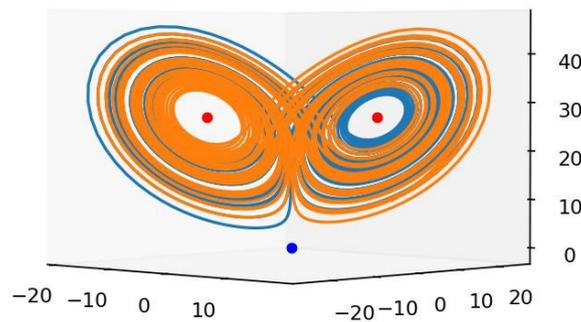


FIGURE 3.5 – Attracteur de Lorenz pour $\rho = 28$, $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$, les conditions initiales de l'attracteur bleu sont $(x_0 = 10, y_0 = 10, z_0 = 10)$ les conditions initiale de l'attracteur orange sont $(x_0 = 10.0000001, y_0 = 10, z_0 = 10)$

3.3 Dimension expérimentale

Nous allons maintenant nous intéresser au moulin à eau de Lorenz (Figure 3.6), aussi appelé moulin à eau de Malkus, il s'agit d'un dispositif physique imaginé par Malkus et Howard en 1973 suite à l'article de Lorenz sur la dynamique chaotique en hydrodynamique, leur objectif était de créer un système physique permettant de retrouver les équations établies par Lorenz. Ce dispositif possède un comportement chaotique et possède évidemment un très fort lien avec l'attracteur de Lorenz car son mouvement est régi par une forme différente des équations de Lorenz. La particularité de ce moulin par rapport à un moulin à eau classique est qu'on ne peut pas prévoir avec certitude et précision les changements de sens de rotation de la roue ou sa vitesse de rotation.

3.3.1 Description du dispositif

Le moulin est composé d'une roue positionnée verticalement ou parfois penchée, sur laquelle se trouve un certain nombre de récipient avec le fond percé, ces récipients sont fixés autour de la roue, une source d'eau est placé au dessus de la roue et remplit le premier récipient ce qui entraine la rotation de la roue, les récipients étant percés, ils se vident et font varier la position du centre des masses, le comportement de la roue est alors imprévisible.

3.3.2 Lien avec l'attracteur de Lorenz

Comment faire le lien entre l'attracteur de Lorenz et ce moulin ? Il faut établir les équations du mouvement de la roue, n'ayant pas le niveau nécessaire en mécanique, nous admettrons que l'équation du mouvement de la roue correspond au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} A' = k * A + \omega * B \\ B' = -\omega * A - k * B + q \\ \omega' = \frac{g * \pi * R * A - \alpha * \omega}{\theta} \end{cases}$$

Avec :

- k le débit de fuite des récipient
- R le rayon de la roue
- q le débit de la source d'eau
- α le taux d'amortissement de la rotation
- θ le moment d'inertie de la roue
- ω la fonction correspondant à la vitesse angulaire
- A la fonction correspondant au déplacement du centre des masses sur l'axe x
- B la fonction correspondant au déplacement du centre des masses sur l'axe y



FIGURE 3.6 – Moulin de Lorenz réalisé par l'université de Harvard

A l'aide du même programme python que précédemment affichons la représentation du système décrivant les mouvement du moulin (Figure 3.7) :

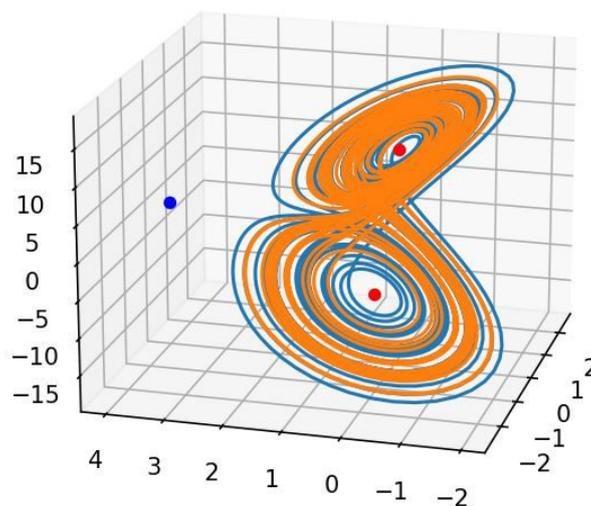


FIGURE 3.7 – Attracteur du moulin de Lorenz pour $R = 1, q = 6, a = 2.9, n = 0.5, g = 9.81$

On observe alors un attracteur très similaire à l'attracteur de Lorenz. Physiquement parlant, ce graphique représente le déplacement du centre des masses du moulin sur les axes x et y et l'évolution de la vitesse angulaire sur l'axe z

De façon analogue à l'attracteur de Lorenz, on peut rechercher les points d'équilibre en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} k * A + \omega * B = 0 \\ -\omega * A - k * B + q = 0 \\ \frac{g * \pi * R * A - \alpha * \omega}{\theta} = 0 \end{cases}$$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on trouve les solutions suivantes :

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ \omega_1 = \frac{q}{k} \\ B_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{-\alpha * \sqrt{\frac{g * q * \pi * R - \alpha * k^2}{\alpha}}}{g * \pi * R} \\ \omega_2 = \frac{\alpha * k}{g * \pi * R} \\ B_2 = -\sqrt{\frac{g * q * \pi * R - \alpha * k^2}{\alpha}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \frac{\alpha * \sqrt{\frac{g * q * \pi * R - \alpha * k^2}{\alpha}}}{g * \pi * R} \\ \omega_3 = \frac{\alpha * k}{g * \pi * R} \\ B_3 = \sqrt{\frac{g * q * \pi * R - \alpha * k^2}{\alpha}} \end{cases}$$

Avec $\frac{g * q * \pi * R - \alpha * k^2}{\alpha} \geq 0$ et $\alpha \neq 0$

Les deux solutions symétriques sont représentées par les deux points rouge sur le graphique et l'autre correspond au point bleu, on constate que pour les valeurs choisies, aucun des points d'équilibre n'est stable. Donc comme pour l'attracteur de Lorenz, le système oscille de façon imprévisible entre ses points d'équilibre instable formant alors un attracteur. En effectuant des calculs analogues à la partie précédente, il serait possible de calculer les valeurs des différentes variables à partir desquelles les points sont stables ou instables. Sur ce même graphique, on peut également constater la forte dépendance aux conditions initiales, l'attracteur bleu à pour conditions initiales ($A_0 = 1, B_0 = 1, \omega_0 = 1$) et l'attracteur rouge ($A_0 = 1.000001, B_0 = 1, \omega_0 = 1$) on constate effectivement que leur évolution diverge fortement malgré la faible variation de départ.

Chapitre 4

Les fractales

Les fractales sont très liées au chaos, on retrouve souvent des formes fractales dans les systèmes au comportement chaotique, mais avant de faire le lien avec les parties précédentes, définissons rapidement ce qu'est une fractale : En mathématique une fractale est un objet qui présente une structure similaire indépendamment de son échelle, autrement dit une structure sur laquelle on peut zoomer indéfiniment et retrouver la structure de départ. De nombreux objets de formes fractales approximatives sont présents dans la nature, les fougères, les brocolis, les flocons de neige ou les arbres par exemple sont des objets "autosimilaires" sur une échelle étendue mais finie. Il est également possible de générer des formes fractales à l'aide d'algorithmes, l'exemple classique est l'ensemble de Mandelbrot qui est défini comme l'ensemble des points c du plan complexe définis par récurrence par

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Les images de l'ensemble de Mandelbrot sont réalisées en parcourant les nombres complexes sur une région carrée du plan complexe et en déterminant pour chacun d'eux si le résultat tend vers l'infini ou pas lorsqu'on y itère une opération mathématique. On obtient alors le graphique suivant :

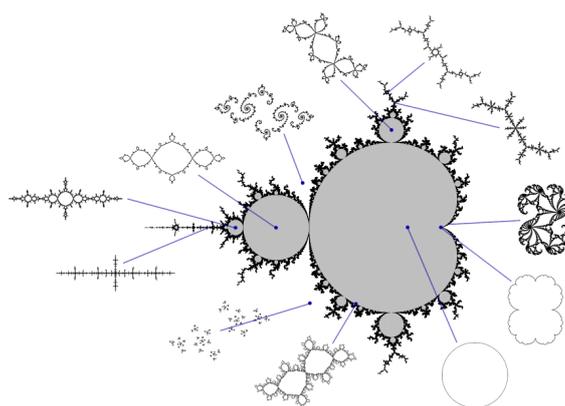


FIGURE 4.1 – Ensemble de Mandelbrot

En zoomant on constate la dimension fractale, un pattern qui se répète à l'infini.

4.1 Fractale d'un diagramme de bifurcation

Les fractales s'appliquent notamment à la fonction logistique, plus précisément à son diagramme de bifurcation. On peut en effet apercevoir une répétition lorsque nous zoomons aux alentours de 3,83. Il y a un retour à l'ordre dans le comportement chaotique de cette fonction, avec un retour d'oscillation entre trois valeurs.

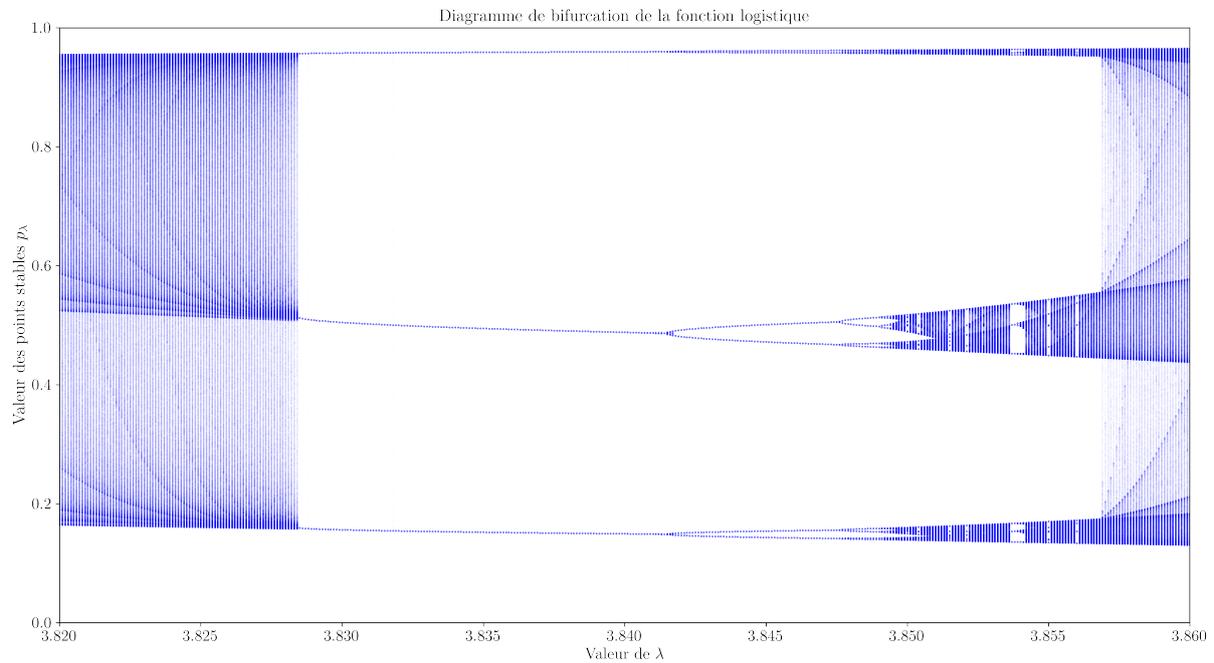


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique (agrandissement)

4.2 Fractale de l'attracteur de Lorenz

Le cas de l'attracteur de Lorenz est particulier en ce qui concerne les fractales, car ça dimension fractale n'est pas directement observable sur sa représentation graphique, la première preuve de sa dimension fractale à été faite purement mathématiquement et sa première observation a été possible en traçant l'attracteur et en conservant 100 chiffre après la virgule.

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons tout au long de ce rapport étudié des systèmes chaotiques sous différents aspects, nous nous sommes intéressés à leurs représentations graphiques et à la façon de générer ces représentations. Nous avons tenté d'analyser mathématiquement leurs comportements afin de mieux les comprendre, cela s'est parfois avéré trop complexe à comprendre en profondeur, notamment pour l'attracteur de Lorenz, mais, cela nous a permis d'explorer et de découvrir de nouveaux concepts et de nouvelles méthodes. Nous avons également exploré un certain nombre de pistes qui ne sont pas présentes dans ce document, comme par exemple le comportement d'un double pendule la génération d'un diagramme de bifurcation avec l'algorithme de Newton.

L'intitulé de ce document est « Étude de systèmes dynamiques non déterministes », mais dans quelle mesure est-ce exact, un aspect auquel nous nous ne sommes pas suffisamment intéressés, mais qui a son importance est la dimension statistique, par exemple dans le cas de l'attracteur de Lorenz, même si son évolution est imprévisible statistiquement parlant, il est parfaitement stable. On pourrait ainsi conclure en disant que le battement des ailes d'un papillon qui modifierais les conditions initiales d'un système ne changerait pas les chances qu'une tornade se produise au Texas, mais plutôt le moment où celle-ci se produira.

Annexes

A Graphiques

A.1 Fonction logistique

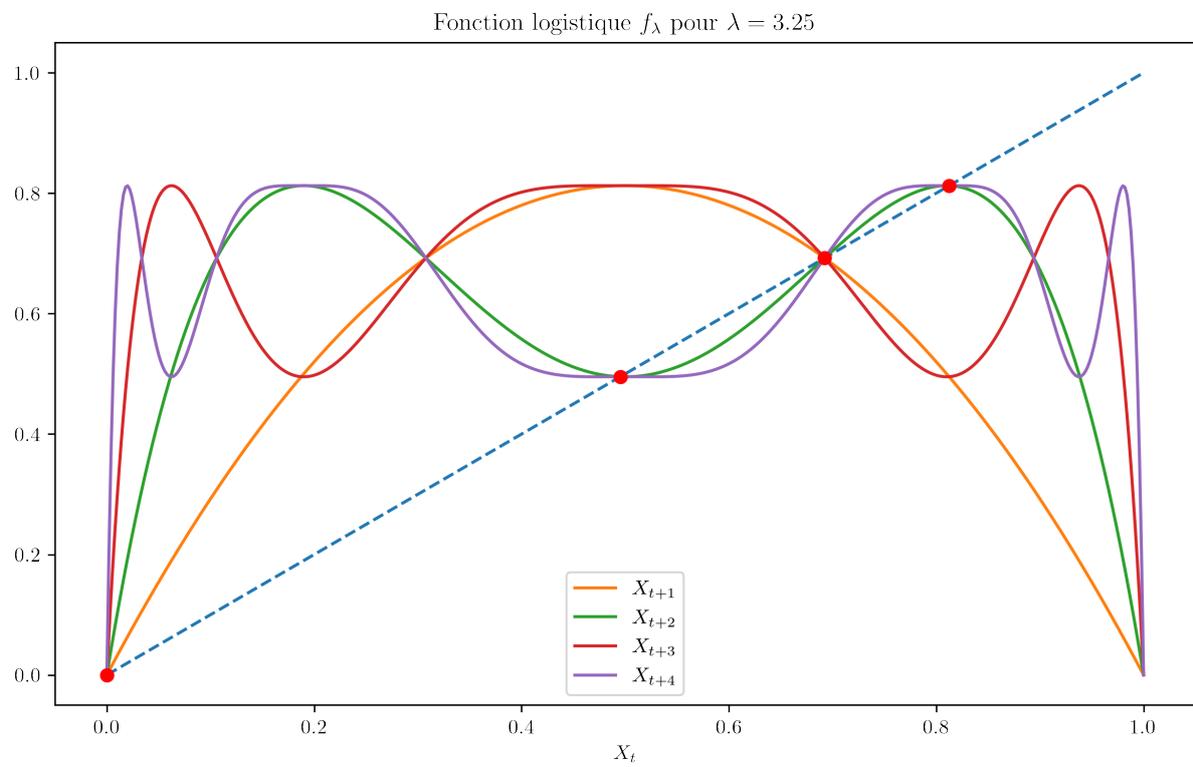


FIGURE A.1 – Fonction Logistique

B Codes python

B.1 Génération de la fonction logistique

```
# Taux d'accroissement (lambda)
a = 3.25
# Génération du vecteur des abscisses
x = np.linspace(0,1,500)
# Génération du vecteur des ordonnées
delta = x
y1 = logistical(x, a)
y2 = logistical(y1, a)
y3 = logistical(y2, a)
y4 = logistical(y3, a)

# Création de la figure (taille en pouces optionnelle)
fig = plt.figure(figsize=(10,6), dpi=300)

ax = fig.add_subplot(1,1,1)

# Génération des courbes
ax.plot(x, delta, '--')
ax.plot(x, y1, label = '$X_{t+1}$')
ax.plot(x, y2, label = '$X_{t+2}$')
ax.plot(x, y3, label = '$X_{t+3}$')
ax.plot(x, y4, label = '$X_{t+4}$')

# Génération des points fixes
stable_points = [0, 1-(1/a)]
if(a > 3):
    stable_points.append((a+1-np.sqrt((a+1)*(a-3)))/(2*a))
    stable_points.append((a+1+np.sqrt((a+1)*(a-3)))/(2*a))

for point in stable_points:
    plt.plot(point, point, 'ro')

# Configuration du graphique
ax.set_xlabel('$X_t$')
ax.set_title('Fonction logistique $f_{\lambda}$ pour $\lambda = {0}$'.format(a))
ax.legend(loc="lower center")

plt.show()
```

B.2 Génération des graphiques en toile d'araignée

```
# Figure dpi
dpi = 72

def plot_cobweb(f, r, x0, nmax=40):
    """Make a cobweb plot.

    Plot  $y = f(x; r)$  and  $y = x$  for  $0 \leq x \leq 1$ , and illustrate the behaviour of
    iterating  $x = f(x)$  starting at  $x = x_0$ .  $r$  is a parameter to the function.

    """
    x = np.linspace(0, 1, 500)
    fig = plt.figure(figsize=(600/dpi, 450/dpi), dpi=dpi)
    ax = fig.add_subplot(111)

    # Plot  $y = f(x)$  and  $y = x$ 
    ax.plot(x, f(x, r), c='#444444', lw=2)
    ax.plot(x, x, c='#444444', lw=2)

    # Iterate  $x = f(x)$  for  $nmax$  steps, starting at  $(x_0, 0)$ .
    px, py = np.empty((2, nmax+1, 2))
    px[0], py[0] = x0, 0
    for n in range(1, nmax, 2):
        px[n] = px[n-1]
        py[n] = f(px[n-1], r)
        px[n+1] = py[n]
        py[n+1] = py[n]

    # Plot the path traced out by the iteration.
    ax.plot(px, py, c='b', alpha=0.7)

    # Annotate and tidy the plot.
    ax.minorticks_on()
    ax.grid(which='minor', alpha=0.5)
    ax.grid(which='major', alpha=0.5)
    ax.set_aspect('equal')
    ax.set_xlabel('$x$')
    ax.set_ylabel(f.latex_label)
    ax.set_title('$x_0 = {:.1}, \lambda = {:.2}$'.format(x0, r))

    #plt.savefig('cobweb_{:.1}_{:.2}.png'.format(x0, r), dpi=dpi)
    plt.show()

class AnnotatedFunction:
    """A small class representing a mathematical function.

    This class is callable so it acts like a Python function, but it also
    defines a string giving its latex representation.
```

```

"""
def __init__(self, func, latex_label):
    self.func = func
    self.latex_label = latex_label

def __call__(self, *args, **kwargs):
    return self.func(*args, **kwargs)

# The logistic map,  $f(x) = rx(1-x)$ .
func = AnnotatedFunction(lambda x,r: r*x*(1-x), r'\lambda x(1-x)')

plot_cobweb(func, 2.5, 0.5)

```

B.3 Génération du diagramme de bifurcation

```
FIGSIZE = (16,9)
DPI = 240 # 240 For 4K, 80 for 720p

BORNE_INF = 0
BORNE_SUP = 4

def simulogi(x0,N,R):
    f = lambda x: R*x*(1-x)
    x = np.zeros(N)
    x[0] = x0
    for i in range(1,N):
        x[i]=f(x[i-1])
    return x

N = 30000
Imin = 100 # plot starting at this iteration
x0= 0.37
rlist = np.arange(BORNE_INF,BORNE_SUP,0.0001)

rs = []
xs = []

for r in rlist:
    rs.append([r]*(N-Imin))
    xs.append(simulogi(x0,N,r)[Imin:])

fig = plt.figure(figsize=FIGSIZE,dpi=DPI)
plt.rc('font', size=15)
plt.xlabel(r"Valeur de  $\lambda$ ")
plt.ylabel(r"Valeur des points stables  $p_{\lambda}$ ",fontsize=16)
plt.title(r"Diagramme de bifurcation de la fonction logistique",
          fontsize=16, color='black')
plt.plot(rs,xs, '.b',markersize=0.01, linewidth=0)
plt.xlim(BORNE_INF,BORNE_SUP)
plt.ylim(0,1)
plt.tight_layout()

filename = "bifurcation.py_.png"

fig.savefig(filename)
```

B.4 Génération d'un attracteur de Lorenz

```
import numpy as np
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

rho = 24
sigma = 10.0
beta = 8.0 / 3.0

x1=sqrt(beta*(rho-1))
y1=sqrt(beta*(rho-1))
z1=rho-1

x2=-sqrt(beta*(rho-1))
y2=-sqrt(beta*(rho-1))
z2=rho-1

#condition de stabilité
stab=sigma*((sigma+beta+3)/(sigma-beta-1))

def f(state, t):
    x, y, z = state # vecteur x,y,z
    return sigma * (y - x), x * (rho - z) - y, x * y - beta * z # systeme d'équation diffé

state0 = [1.0, 1.0, 1.0] #condition initiale
state1= [1.1, 1.0, 1.0]
t = np.arange(0.0, 40, 0.01) #temps

states = odeint(f, state0, t) #résoud le system d'équation différentiel
states1 = odeint(f, state1, t) #résoud le system d'équation différentiel
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection="3d")
ax.plot(states[:, 0], states[:, 1], states[:, 2])
ax.plot(states1[:, 0], states1[:, 1], states1[:, 2])
print(rho)
print(stab)
print(sigma)
print(beta+1)
ax.scatter(x1,y1,z1,color="red")
ax.scatter(x2,y2,z2,color="red")
plt.draw()
```

Chapitre 6

Sources

6.1 Sites internet

- https://en.wikipedia.org/wiki/Malkus_waterwheel
- https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale#Dimension_fractale
- <https://scienceetonnante.com/2018/02/16/theorie-du-chaos-et-effet-papillon/>
- <https://demonstrations.wolfram.com/LorenzWaterWheel/>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Attractor#Strange_attractor
- <http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/~phyexp/pmwiki.php/RoueChaotique/RoueDeMalkus-Lorenz>
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique#Domaines_de_convergence

6.2 Vidéos visionnées

- https://www.youtube.com/watch?v=0FX-1_RDe64
- <https://www.youtube.com/watch?v=aAJkLh76QnM>
- <https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk&t=2s>

6.3 Documents consultés

- https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques/cours_lorenz.pdf
- <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556972/document>

Mots clefs

Fractales - Diagramme de bifurcation - Lorenz - Verhulst - Chaos - Effet Papillon - Malkus -
Fonction logistique - Attracteur - Point fixe stable et instable - Python - Suite logistique

Résumé

Ce rapport initie aux bases de l'étude des systèmes dynamiques non déterministes, par l'étude de la fonction logistique, utilisée dans la modélisation de populations; ou encore les attracteurs de Lorenz, utilisés dans l'étude de l'atmosphère terrestre.
