
SYSTEMES GRAVITATIONNELS A TROIS ASTRES

Bastien BARNEOUD

Thomas BEDRINE

UTBM AC20 – A19

Suiveur : Frédéric HOLWECK

Resp. UV : Mohamed TACHIKART

Remerciements

Avant tout, nous souhaitons nous adresser aux personnes qui nous ont entouré lors de nos recherches scientifiques dans le cadre de l'AC20.

Nous remercions tout d'abord M. Mohamed TACHIKART, responsable de l'UV AC20, sans qui la possibilité de réaliser de tels travaux serait inexistante, ainsi que l'UTBM qui encourage les étudiants à faire de telles recherches.

Parlant de motivation, il serait erroné d'oublier de mentionner nos entourages propres, à savoir nos familles, nos amis et nos collègues, qui nous auront apporté conseils et courage.

Nous aimerions également remercier M. Alessandro ROUSSEL, vulgarisateur scientifique, qui nous a fait bénéficier de son expérience en matière de calculs théoriques dans les problèmes gravitationnels.

Enfin, nous remercions tout particulièrement M. Frédéric HOLWECK, encadrant principal de notre sujet, qui nous a fourni une aide et des outils tout bonnement indispensables à nos travaux.

Préambule

Depuis l'Antiquité grecque, on est capable d'observer et d'étudier le mouvement des astres qui nous entourent. La « musique des sphères » est la première théorie selon laquelle les astres autour de nous décrivent une certaine harmonie dans leurs mouvements, qu'il serait alors possible de prévoir. Ce sont les débuts de l'astronomie.

Bien plus tard, aux XVI^e et XVII^e siècles, les travaux de Copernic, Galilée et Kepler permettent de mieux comprendre les mouvements des planètes dans notre système solaire. Mais ce sont les travaux de Newton qui auront, par la suite, largement influencé l'étude du mouvement des astres observables, entre autres. En publiant ses découvertes sur la gravitation universelle, dont les lois établies sont encore d'actualité, il révolutionne le monde de la physique. Enfin, Einstein, en généralisant cette théorie à un concept nouveau appelé l'espace-temps, signera l'aboutissement d'un travail de plusieurs siècles sur la modélisation de la première interaction dans l'univers, bien que de nombreux faits soient encore à éclaircir.

Il est donc désormais possible de prévoir le mouvement de corps célestes à partir d'informations données grâce, notamment, à la deuxième loi de Newton. Cependant, cette étude se restreint très souvent à l'étude d'un système gravitationnel constitué de deux objets, l'un étant de masse négligeable devant l'autre. Quid des systèmes gravitationnels à trois objets ? On pourrait bien entendu mentionner pour exemple le système Soleil/Terre/Lune, cependant, étant constitué de masses négligeables unes à unes, son étude s'apparenterait entièrement à celle de deux systèmes gravitationnels triviaux imbriqués. Ce que nous proposons ici, c'est de se pencher sur d'éventuels systèmes à trois corps de masses quelconques, mais a fortiori des objets de masses comparables, le cas contraire entraînant une simplification vers un problème à deux corps. C'est donc exclusivement sur ces systèmes que portera notre étude.

Dans ce sujet d'AC20, nous nous porterons exclusivement sur l'influence cinématique et dynamique de la gravité sur les corps massifs ponctuels. Dans un terme plus précis, il s'agira d'étudier l'existence et, le cas échéant, la stabilité des systèmes gravitationnels multi astres dans le temps. Il en découlera l'étude des trajectoires que prendrait chacun des corps du système, et si nécessaire de la dynamique de ces trajectoires dans le temps. On pourra notamment compléter cette étude en faisant le parallèle entre les systèmes gravitationnels à 3 corps et la théorie du chaos.

Table des matières

Remerciements	2
Préambule	3
Introduction.....	6
Outils mathématiques	6
Modélisation physique des interactions	6
Le barycentre.....	7
La méthode énergétique	7
Le Problème à Deux Corps.....	9
Présentation mathématique du problème à deux corps.....	9
Etude des trajectoires solutions.....	10
Etude du point « instable » du problème à deux corps	24
Modélisation du Problème à Trois Corps.....	26
Expression mathématique du problème à trois corps	26
Méthodes de résolution numérique.....	29
Méthode d'Euler.....	29
La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2	30
La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4	32
Le programme de simulation.....	34
Construction du programme	34
Précision	37
Aspect mémoire / temps de calcul.....	40
Etude des trajectoires solution.....	44
Une solution triviale	44
Solution de Cris Moore.....	48
Solutions de Broucke.....	51
Solutions de type « Tendance binaire »	54
Solutions de type « chute libre ».....	55
Notion de hiérarchie	57

Approche physique du problème à Trois corps	58
Les niveaux de stabilité.....	58
Le chaos dans le problème à trois corps.....	60
Ouverture.....	61
Existence des systèmes trinaires.....	61
Le problème à N-corps	65
Conclusion	69
Des systèmes gravitationnels à trois corps.....	69
De l'AC20.....	70
Références.....	72
Sitographie	72
Résumé.....	73

Introduction

Outils mathématiques

Modélisation physique des interactions

Notre sujet s'intéressera aux mouvements des corps célestes uniquement soumis à l'interaction gravitationnelle. Ces derniers seront alors considérés comme électriquement neutres et suffisamment éloignés pour que l'interaction forte ou l'interaction faible (variant selon l'inverse de la distance entre les deux corps à la puissance 7) n'aient qu'une influence négligeable sur le bilan des forces agissant sur les corps, ce qui est valable lorsque la distance r séparant les objets est telle que $\frac{1}{r^7} \ll \frac{1}{r^2}$.

Nous ne considérerons le problème qu'à travers la mécanique classique, et non relativiste. La variation du temps propre de chaque corps comparée au temps universel ne sera donc pas prise en compte, qu'elle soit due à leur vitesse ou à leur influence gravitationnelle. Par principe, on considèrera donc le vecteur temps comme orthogonal à l'espace.

➤ *La seconde loi de Newton*

Aussi appelée le Principe Fondamental de la Dynamique, cette formule très connue est celle qui nous servira le plus car elle est à la base de tout calcul de trajectoire. Elle met en lien le vecteur accélération d'un corps et les forces qu'il subit, au coefficient massique près :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

➤ *La loi de l'interaction gravitationnelle*

La seconde relation apparaissant tout naturellement dans les problèmes traitant de la gravitation est la loi sur l'interaction gravitationnelle, également établie par Newton. Ainsi, la force ressentie par un corps 1 soumis à la gravité du corps 2, de masses respectives m_1 et m_2 , est exprimée selon la relation vectorielle suivante :

$$\vec{F}_{2/1} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

Avec G la constante de gravitation universelle (que nous poserons à des valeurs arbitraires durant notre étude) et \vec{u} le vecteur directeur de l'axe des deux corps concernés par l'interaction.

Le barycentre

De par la complexité des interactions lors de l'étude d'un système à n corps, il nous sera pratique de convertir les $n - 1$ interactions élémentaires que subit chaque planète en une seule interaction venant d'un barycentre massique du système : une sorte de « bilan » des interactions agissant sur un corps, ramené alors à n « problèmes à un corps ».

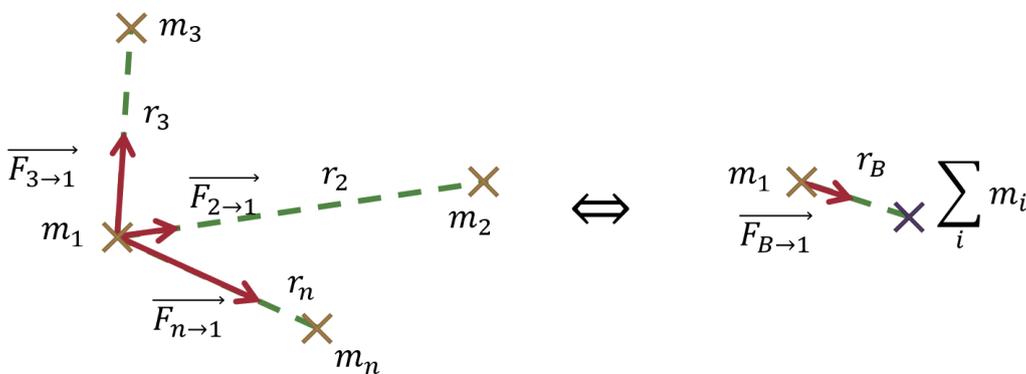


Figure 1 – Principe du barycentre

Nous pouvons alors, pour n'importe quel système à n corps, établir un barycentre au centre du repère par la relation vectorielle suivante :

$$\sum_i^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

Avec O le centre du repère (ou le barycentre) et A_i les centres massiques de chaque sous-système de masse m_i .

Le principe même de ce barycentre est que toutes les actions exercées en lui s'annulent. Cela permet donc de dire qu'il reste immobile au cours du mouvement.

La méthode énergétique

Il est parfois plus simple, pour les mouvements à caractéristiques polaire, de considérer la modélisation énergétique plutôt que dynamique. On peut alors faire apparaître un nouveau concept physique dans la résolution du problème : le **moment cinétique** L .

Le moment d'inertie est un concept de quantité de mouvement appliqué à la rotation axiale : il est donc défini, en Joules, pour un corps de centre de gravité M , de quantité de mouvement p , tournant autour de l'axe z du repère de centre A (à une distance radiale r), par la relation suivante :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}, \text{ soit } L_A = mr^2\dot{\theta}\vec{z}$$

(Avec $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire)

D'après la loi de conservation de l'énergie, dans un système où les énergies dissipatives sont absentes, l'énergie mécanique E_m du système est constante. On peut alors l'exprimer selon la relation suivante, avec en polaire $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$:

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mG}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mG}{r}$$

(Avec \dot{r} la vitesse radiale du système)

Selon la conservation du moment cinétique, $mr^2\dot{\theta} = L_0$, avec L_0 constant. On peut alors réécrire l'expression de E_m comme suit :

$$E_m = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L_0}{2mr^2} + \frac{mG}{r}$$

Afin de pouvoir étudier le caractère de la trajectoire, dépendant de la vitesse radiale \dot{r} , nous pouvons utiliser une forme de potentiel énergétique effectif U_{eff} , en Joules, qui serait alors égal à $\frac{L_0}{2mr^2} + \frac{mG}{r}$. Ce potentiel effectif est donc dépendant de r .

On a alors $E_m = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r)$.

Nous pourrions nous servir de ces expressions lors de la définition des trajectoires solution du problème à deux corps, comme suit.

Le Problème à Deux Corps

Avant de composer avec le problème à trois corps, nous devons d'abord nous intéresser au problème à deux corps. Son principe se ramène aux simplicités suivantes : un corps 1 gravite autour d'un corps 2, qui, de par le principe de la gravitation, est lui aussi affecté de l'attraction gravitationnelle. Ne pouvant donc pas considérer un des corps comme immobile (tous deux subissant une accélération non nulle), nous nous référerons donc au barycentre du système afin d'établir des solutions simplifiées. En raison du fait que le système est linéaire, les planètes ainsi que le barycentre, bien évidemment, sont considérés sur un axe. Le barycentre étant, lui, réellement immobile par définition, nous pouvons considérer une certaine symétrie centrale du mouvement des deux planètes, par rapport au barycentre, à un coefficient dépendant des masses près.

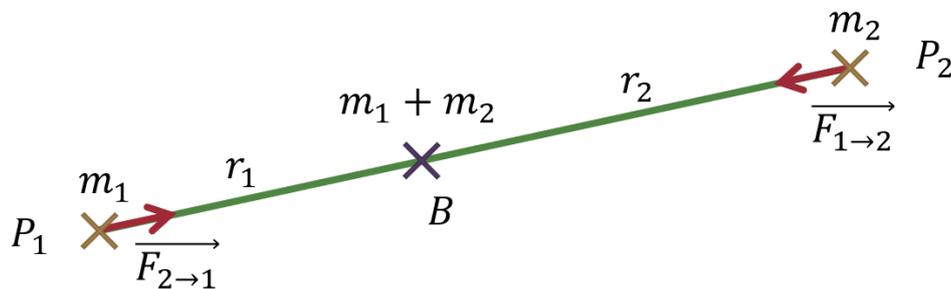


Figure 2 – Modélisation du problème à deux corps

Le barycentre du système est situé à une distance r_1 de la planète P_1 de masse m_1 et à une distance r_2 de la planète P_2 de masse m_2 . Il dispose alors d'une masse apparente égale à $m_1 + m_2$. Avec d la distance entre les 2 planètes, on a alors $r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} d$ et $r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} d$.

Présentation mathématique du problème à deux corps

On a donc un corps 1 de masse m_1 et un corps 2 de masse m_2 disposés à une distance d dans le plan muni d'un repère cartésien. Ces objets s'influencent entre eux par l'attraction gravitationnelle. Chacune de leurs interactions réciproques sont donc rapportées à l'interaction du barycentre sur chacune de ces planètes. On considère la planète 1, disposée à une distance r du barycentre (lui-même de coordonnées $(0,0)$ dans le repère). On a donc l'égalité suivante :

$$(1) \overrightarrow{F_{B \rightarrow 1}} = \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \vec{u} = \frac{Gm_1(m_1 + m_2)}{r^2} \vec{u}$$

On peut alors, grâce à la seconde loi de Newton, exprimer l'accélération que subit cette planète par rapport au repère :

$$(2) \overrightarrow{F_{1/2}} = m_1 \vec{a}$$

Avec \vec{a} l'accélération du corps 2. En effet, dans ce système la seule force extérieure considérée est celle exercée par le barycentre des 2 corps (une masse par définition immobile et égale à $m_1 + m_2$). En associant (1) et (2), on a donc l'équation suivante, nécessaire pour la résolution du problème :

$$(3) \vec{a} = \frac{(m_1 + m_2)G}{r^2} \vec{u}$$

Puis, lorsque l'on normalise le vecteur \vec{u} :

$$(3) \vec{a} = \frac{(m_1 + m_2)G}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \times -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{p}$$

Avec \vec{p} le vecteur position. Le signe - vient de l'orientation du vecteur unitaire \vec{u} , toujours orienté vers le centre du repère, donc toujours de sens opposé au vecteur position. Ainsi, en x et y :

$$(3) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -\frac{(m_1 + m_2)G}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système différentiel qui nous permettra d'établir des solutions mathématiques pour le problème :

$$(4) \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{(m_1 + m_2)G}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \\ \ddot{y} = -\frac{(m_1 + m_2)G}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \end{cases}$$

C'est à partir de ce système qu'on tentera de trouver des trajectoires solutions pour le problème à deux corps.

Etude des trajectoires solutions

A partir du système précédemment obtenu, on cherche donc à résoudre les équations différentielles en faisant certaines hypothèses (forme de la trajectoire, conditions initiales).

Pour chaque composante, la solution générale s'exprime comme suit :

$$y(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Pour x , on prendra pour constantes C et D .

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a défini plus précisément les composantes :

$$\begin{cases} y(t) = Ae^{i\sqrt{k}t} + Be^{-i\sqrt{k}t} \\ \ddot{y}(t) = -(Ak + Bke^{2i\sqrt{k}t})e^{-i\sqrt{k}t} \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = Ce^{i\sqrt{k}t} + De^{-i\sqrt{k}t} \\ \ddot{x}(t) = -(Ck + Dke^{2i\sqrt{k}t})e^{-i\sqrt{k}t} \end{cases}$$

Avec $k = \frac{(m+M)G}{r^3}$.

➤ *Cas de la trajectoire circulaire*

Résolution analytique du problème

Dans le cas d'une trajectoire parfaitement circulaire de l'objet 2 autour du barycentre, on peut avant tout calcul noter les évidences suivantes :

- Avant le temps $t_0 = 0$, l'objet 2 suit une trajectoire assimilable à une droite dans le plan. Il rentre dans le champ d'attraction gravitationnelle de l'objet 1 au temps t_0 , en $y = 0, x = r$, et une vitesse initiale constante v_i dont la composante n'est qu'en y (voir schéma)
- Le rayon r du cercle formé est constant en tout t et vaut $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- La trajectoire que l'on recherche étant circulaire, elle répond alors à une équation de la forme $\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$, dont on déterminera plus tard les composantes.

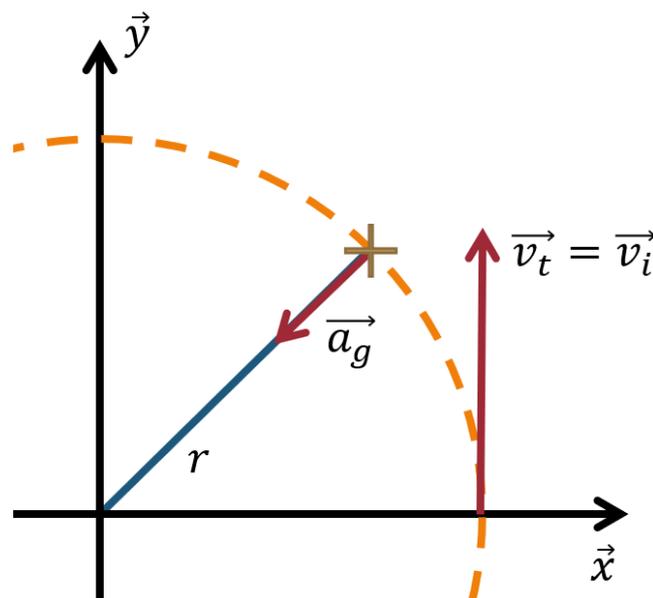


Figure 3 – Schématisation du problème

Rappel des conditions initiales ($t = 0$) :

$$\begin{cases} x = r \\ v_x = 0 \\ a_x = ? \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ v_y = v_i \\ a_y = 0 \end{cases}$$

On applique donc les conditions initiales en y et en \dot{y} ($t = 0$) :

$$\begin{cases} Ae^{i\sqrt{k} \times 0} + Be^{-i\sqrt{k} \times 0} = 0 \\ -k(A + Be^{2i\sqrt{k} \times 0})e^{-i\sqrt{k} \times 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -k(A + B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ A = -B \end{cases}$$

On peut donc réécrire l'expression de $y(t)$ comme ceci :

$$y(t) = Ae^{i\sqrt{k}t} - Ae^{-i\sqrt{k}t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A(e^{i\sqrt{k}t} - e^{-i\sqrt{k}t})$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2iA \times \sin(\sqrt{k}t) \text{ (D'après la formule d'Euler)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = r \sin\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)G}{r^3}} t\right)}$$

Les conditions initiales en x et \dot{x} à $t = 0$ ne permettent pas d'obtenir des résultats aussi concluants. En revanche, lorsque $\sqrt{k}t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, on a $x = 0$. On aimerait que \dot{x} soit aussi égale à 0 à ce temps, et c'est ce que l'on va démontrer brièvement.

Dans une trajectoire circulaire, la vitesse tangentielle est constante, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'accélération tangentielle. L'accélération est donc purement radiale et est par conséquent toujours orientée vers le centre de rotation.

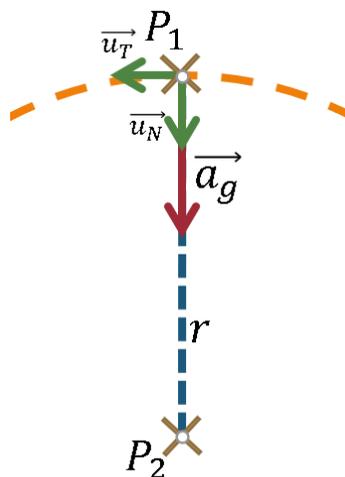


Figure 4 – Repère de Frenet

Lorsque $t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, le vecteur position est normal à l'axe des abscisses, donc l'accélération radiale est sur l'axe des ordonnées. Cela signifie donc que l'accélération en x est nulle.

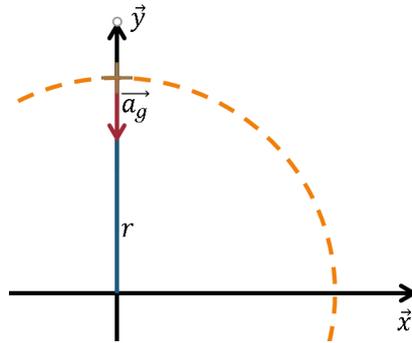


Figure 5 – Grandeurs quand r est porté par y

On a donc les conditions du système à $t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \ddot{x} = 0 \end{cases}$$

On introduit donc les conditions initiales pour $t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$:

$$\begin{cases} Ce^{i\frac{\pi}{2}} + De^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 \\ -(Ck + Dke^{i\pi})e^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ci - Di = 0 \\ ki(C - D) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = D \\ C = D \end{cases}$$

On peut donc réécrire $x(t)$ comme ceci :

$$x(t) = Ce^{i\sqrt{k}t} + Ce^{-i\sqrt{k}t}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = C(e^{i\sqrt{k}t} + e^{-i\sqrt{k}t})$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 2C \times \cos(\sqrt{k}t) \text{ (D'après la formule d'Euler)}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = r \cos\left(\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)G}{r^3}} t\right)$$

On note déjà qu'on a bel et bien trouvé des solutions de la forme :

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

Mais on peut aller plus loin et déterminer cette distance r qui vérifie ainsi le système. Pour cela, on a recours à deux égalités :

$$\begin{cases} a_g = \frac{v_t^2}{r} \\ a_g = \frac{(m + M)G}{r^2} \end{cases}$$

Ces deux égalités proviennent respectivement de l'accélération centripète dû à la courbure de la trajectoire et de l'accélération gravitationnelle tirée de la seconde loi de Newton. On recherche alors l'équilibre entre ces deux termes. On a donc la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{v_t^2}{r} &= \frac{(m_1 + m_2)G}{r^2} \\ \Leftrightarrow v_t^2 &= \frac{(m_1 + m_2)G}{r} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{(m_1 + m_2)G}{v_t^2} \end{aligned}$$

Or dans notre cas d'étude circulaire, la vitesse tangentielle v_t est tout simplement la vitesse initiale v_i , donc on obtient :

$$\boxed{r = \frac{(m_1 + m_2)G}{v_i^2}}$$

On a donc réussi à calculer r en fonction d'un seul paramètre considéré variable, c'est-à-dire la vitesse initiale v_i .

En remplaçant la valeur ainsi obtenue dans le système d'équation des coordonnées, on a alors les équations des trajectoires avec le moins d'inconnues possibles :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{(m_1 + m_2)G}{v_i^2} \cos\left(\frac{v_i^3}{(m_1 + m_2)G} t\right) \\ y(t) = \frac{(m_1 + m_2)G}{v_i^2} \sin\left(\frac{v_i^3}{(m_1 + m_2)G} t\right) \end{cases}}$$

On a donc $\frac{v_i^3}{(m_1 + m_2)G} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)G}{r^3}} = \omega$ (la vitesse de rotation des planètes en rad/s). On peut la convertir en une période de révolution T (en secondes) par la relation suivante :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{v_i^3}$$

D'ailleurs, avec $v_i = \omega r_i = \frac{2\pi r_i}{T}$, on peut facilement reconstruire la *troisième loi de Kepler* :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{\left(\frac{2\pi r_i}{T}\right)^3} = \frac{T^3 G(m_1 + m_2)}{4\pi^2 r_i^3} \\ \frac{r_i^3}{T^2} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \end{aligned}$$

On notera la présence d'un coefficient massique différent de celui que l'on a l'habitude de rencontrer avec cette loi, explicable par le fait qu'une des deux masses est souvent négligée par rapport à l'autre (souvent dans un rapport étoile-planète, n'étant pas notre sujet d'étude).

Solution graphique théorique

On peut alors appliquer les assertions émises antérieurement quant aux relations entre le barycentre et les trajectoires des planètes ainsi que l'expression du système d'équations solution afin d'établir un modèle graphique de la solution circulaire du problème à deux corps.

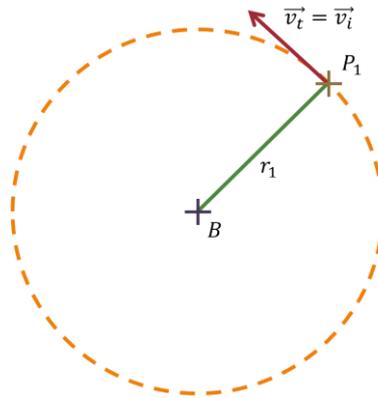


Figure 6 - Solution circulaire réduite à un corps

On peut alors établir la trajectoire de la seconde planète en appliquant les formules liant les masses de chaque planète et leurs rayons respectifs rapport au barycentre. Nous allons ici considérer des couples de masses (m_1, m_2) différents afin de représenter au mieux les possibilités de solution circulaire. On rappelle que $r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} d = \frac{m_2}{m_1+m_2} (r_1 + r_2)$, donc si $m_2 = km_1$, alors :

$$r_1 = \frac{1}{k+1} (r_1 + r_2)$$

$$r_2 = r_1(k+1) - r_1 = kr_1$$

Avec v_{t_1} et v_{t_2} les vitesses tangentielles de P_1 et P_2 respectivement, on peut également établir la relation suivante :

$$v_{t_2} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{kr_1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} v_{t_1}$$

On peut également étendre ce rapport de masses à la période de révolution du système en comparant $T_{(m_1 = m_2)}$ à $T_{(m_2 = km_1)}$

$$\frac{T_{(m_2 = km_1)}}{T_{(m_1 = m_2)}} = \frac{\frac{2\pi G(m_1 + km_1)}{v_i^3}}{\frac{2\pi G(m_1 + m_1)}{v_i^3}} = \frac{k + 1}{2}$$

Ce qui paraît logique, vu que la masse totale du système ($m_1 + m_2$) est multipliée par $\frac{k+1}{2}$ lorsque l'on passe de $m_1 = m_2$ à $m_2 = km_1$ et vu que la période de révolution du système évolue selon la masse totale à la puissance 1.

Voici des représentations de la solution circulaire du problème à deux corps pour des couples de masses (m_1, m_2) différents :

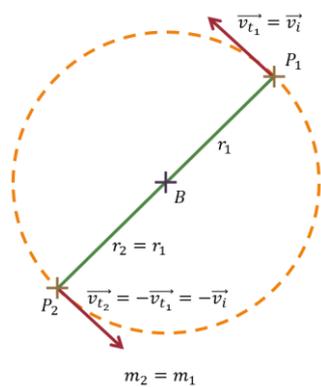


Figure 7 – Solution circulaire avec $m_1 = m_2$

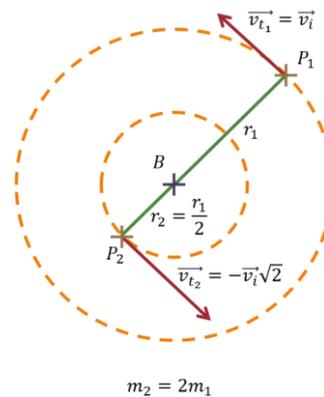


Figure 8 – Solution circulaire avec $m_2 = 2m_1$

Nous pouvons également, à partir de notre programme de simulation du problème à deux corps, concrétiser ces calculs :

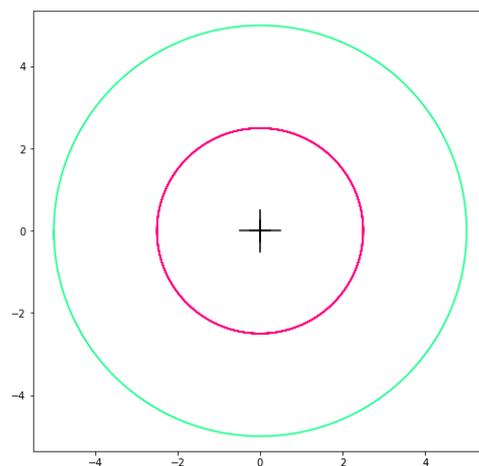


Figure 9 – Simulation du cas circulaire avec $m_2 = 2m_1$

Unicité du cas circulaire

Le cas circulaire est une solution bien particulière au problème à deux corps : elle requiert des conditions de mouvement très précises sans lesquelles les trajectoires deviennent elliptiques. Nous avons ici simulé une série de 10 planètes présentant une vitesse initiale légèrement

différente de la vitesse initiale propre à la trajectoire circulaire (le cas circulaire étant celui en violet sur les graphiques – dont la vitesse et l'accélération sont constantes). On prend pour paramètres les valeurs suivantes : $m_1 = m_2 = G = 1, r_i = 5, v_i = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{r_i}} = 0,6324555$, additionnée d'une perturbation de $k \times 0.001, k \in \llbracket -5, 5 \rrbracket$ à chaque planète différente.

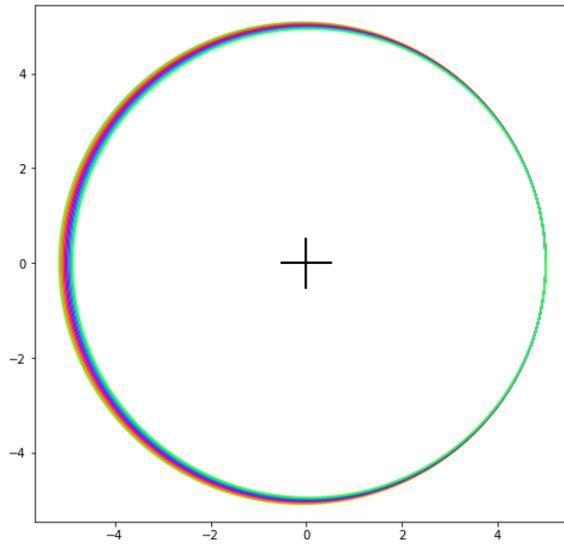


Figure 10 – Trajectoires

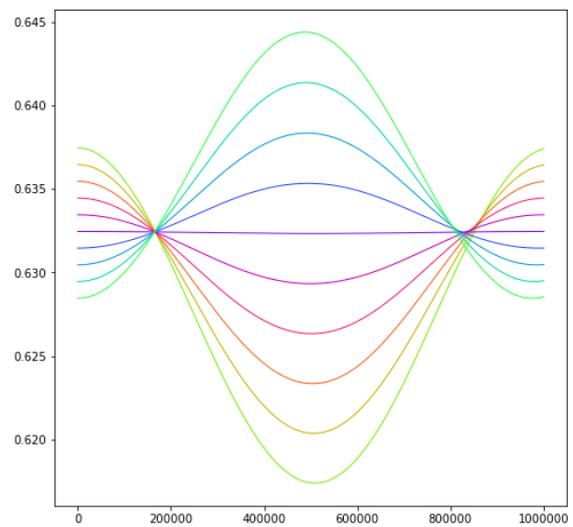


Figure 11 – Vitesses

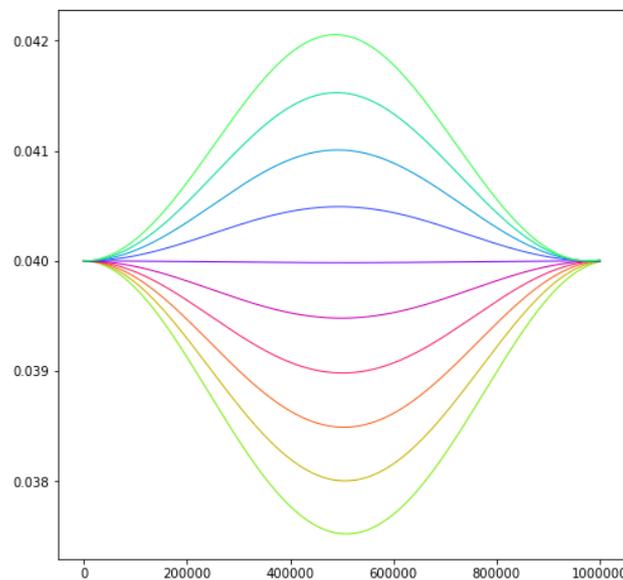


Figure 12 – Accélérations

NB : dans les figurés ci-dessus, la vitesse et l'accélération sont fonctions des itérations (it), et non du temps t.

En positionnant cette fois la perturbation sur le rayon initial à la place de la vitesse tangentielle et à hauteur de $k \times 0.2$, on remarque également une faible sensibilité aux changements.

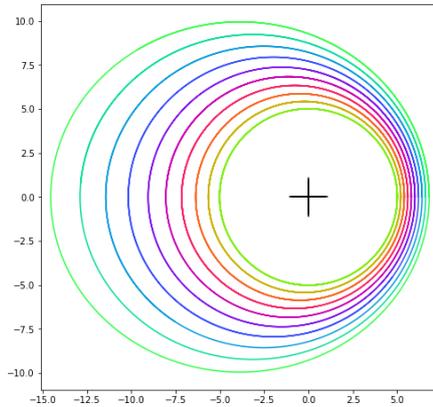


Figure 13 – Trajectoires

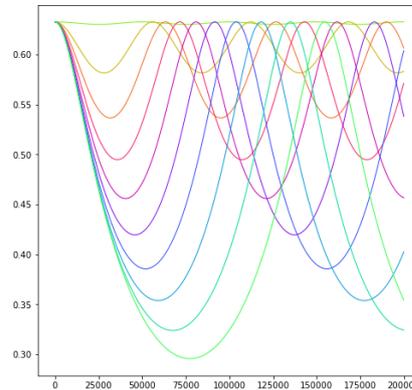


Figure 14 – Vitesses

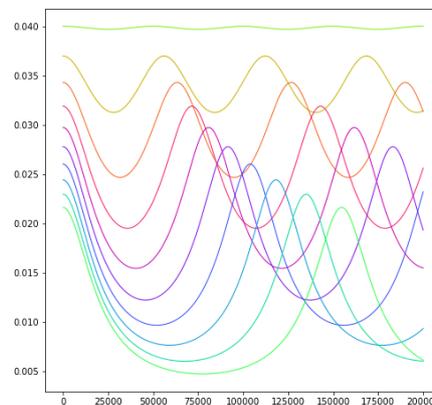


Figure 15 – Accélérations

Nous pouvons maintenant passer à une solution plus générale du problème à deux corps : la solution sous forme conique.

➤ *La solution conique*

Nous allons désormais considérer le problème dans le référentiel polaire associé au barycentre du système (ou son centre de gravité). Comme précédemment, nous ne considérerons la trajectoire que d'une seule des deux planètes avant de pouvoir étendre la solution au système entier.

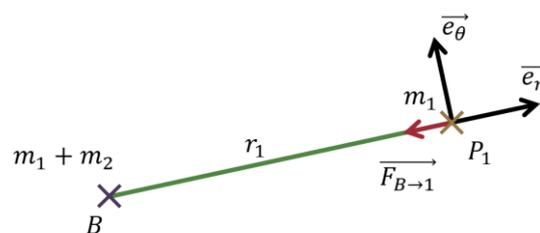


Figure 16 – Modélisation d'une planète dans le repère polaire associé

Recherche de l'équation solution

On peut alors appliquer la formule de l'accélération dans le repère polaire associé au barycentre. On s'intéresse alors à P_1 :

$$\vec{a}_{P_1} = (\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}_1 \dot{\theta} + r_1 \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_{P_1} = \left(-\frac{Gm_2}{d^2}\right) \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\theta$$

On peut ensuite résoudre l'équation suivante grâce à l'accélération en \vec{e}_θ :

$$2\dot{r}_1 \dot{\theta} + r_1 \ddot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r_1^2 \dot{\theta}) = 0$$

On retrouve alors à travers cette expression le principe de conservation du moment cinétique hors masses : $H_1 = r_1^2 \dot{\theta} = \frac{L_1}{m_1}$ est constant. On applique donc notre avancement à l'accélération en \vec{e}_r :

$$\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}^2 = -\frac{Gm_2}{d^2}$$

$$\ddot{r}_1 - \frac{H_1^2}{r_1^3} = -\frac{Gm_2}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1\right)^2}$$

$$\ddot{r}_1 = -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r_1^2} + \frac{H_1^2}{r_1^3}$$

Nous avons donc déterminé l'accélération radiale que subit une planète en fonction des masses du système, de sa position dans l'axe et de son moment cinétique. Nous pouvons maintenant poser $u = \frac{1}{r}$ et étudier sa dérivée seconde par rapport à θ :

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta} \frac{du}{dt} = \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} \right) = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} \right) = \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} \right)$$

$$= \frac{r_1^2}{H_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{u} r_1^2}{L_1} \right) = \frac{r_1^2}{H_1} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\dot{r}_1}{H_1} \right)$$

$$= \frac{-r_1^2 \ddot{r}_1}{H_1^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{H_1}{r_1^2}$$

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{\dot{r}_1}{r_1^2}$$

On peut alors reprendre l'expression de \ddot{r}_1 et la fusionner avec l'expression $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ que l'on vient de déterminer :

$$\ddot{r}_1 = -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{r_1^2} + \frac{H_1^2}{r_1^3}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{H_1^2}{r_1^2} = \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{r_1^2} - \frac{H_1^2}{r_1^3}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{Gm_2^3}{H_1^2(m_1 + m_2)^2} - u$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_1 &= -\frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{H_1^2}{r_1^2} \\ u &= \frac{1}{r_1} \end{aligned} \right\}$$

Vu que $\frac{Gm_2^3}{H_1^2(m_1+m_2)^2}$ est constant, on peut résumer le tout à l'équation différentielle suivante :

$$u'' = -u + C$$

Dont la solution s'exprime en fonction de θ par l'expression suivante :

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + C$$

Avec θ_0 , A et C des constantes arbitraires élémentaires par rapport aux conditions initiales.

On peut alors utiliser la définition de u pour exprimer le tout en fonction de r_1 :

$$r_1 = \frac{\frac{1}{C}}{1 + \frac{A}{C} \cos(\theta - \theta_0)}$$

On retrouve alors l'équation d'une conique (du type $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$) dont le paramètre p vaut $\frac{1}{C} = \frac{H_1^2(m_1+m_2)^2}{Gm_2^3} = c^{te}$ et l'excentricité e vaut $\frac{A}{C} = A \frac{H_1^2(m_1+m_2)^2}{Gm_2^3}$.

Afin de définir totalement cette expression, il nous faut poser des conditions initiales.

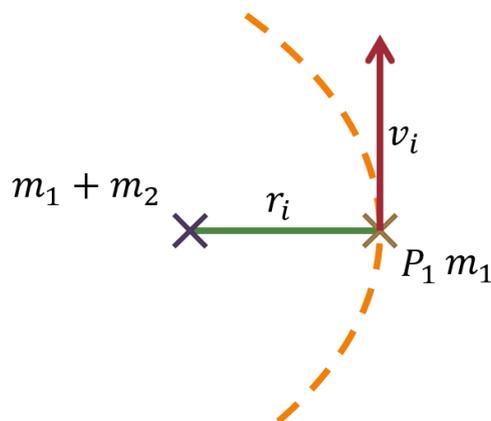


Figure 17 – Modélisation des conditions initiales

On prend alors comme référence à θ_0 le couple (r_i, v_i) . On peut définir que $\theta_0 = 0$ afin de simplifier les expressions. On peut alors raisonner géométriquement :

A $\theta = \theta_0 = 0, r_1 = r_i$. On a alors $r_i = \frac{\frac{H_i^2(m_1+m_2)^2}{Gm_2^3}}{1+A \frac{H_i^2(m_1+m_2)^2}{Gm_2^3}}$, avec $H_i = r_i^2 \dot{\theta}_0 = r_i v_i = H_1$. On a alors

l'expression suivante :

$$r_i = \frac{\frac{r_i^2 v_i^2 (m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}{1 + A \frac{r_i^2 v_i^2 (m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}$$

$$A = \frac{1}{v_i} - \frac{Gm_2^3}{r_i^2 v_i^2 (m_1 + m_2)^2}$$

On peut alors remplacer A dans l'expression principale :

$$r_1 = \frac{\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}{1 + \frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3} \left(\frac{1}{v_i} - \frac{Gm_2^3}{H_1^2(m_1 + m_2)^2} \right) \cos(\theta)}$$

$$r_1(\theta) = \frac{\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}{1 + \left(\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_i Gm_2^3} - 1 \right) \cos(\theta)}$$

Nous avons réussi à trouver une solution générale au problème à deux corps. Nous allons désormais l'appliquer à travers plusieurs exemples.

La solution générale du problème à deux corps

On applique ici le même principe que dans la solution circulaire. A l'aide des assertions sur la relation entre les rayons et les masses, on détermine la solution spécifique à $m_1 = m_2$:

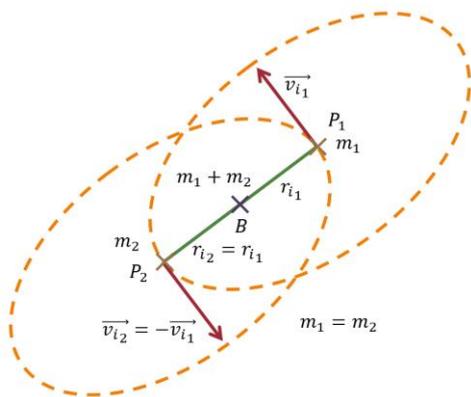


Figure 18 – Solution elliptique aux conditions initiales

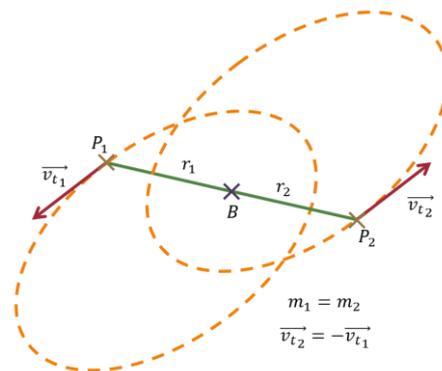


Figure 19 – Solution elliptique (2)

En revanche, lorsque les masses sont différentes, les relations entre les composantes des conditions initiales deviennent plus complexes ; pour que $r_1(\theta) = r_2(\theta)$ en tout θ , il faut alors satisfaire l'égalité suivante :

$$\frac{\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}{1 + \left(\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_1} G m_2^3} - 1\right) \cos(\theta)} = \frac{\frac{H_2^2(m_1 + m_2)^2}{Gm_1^3}}{1 + \left(\frac{H_2^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_2} G m_1^3} - 1\right) \cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{m_2^3 + \left(\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_1} G} - m_2^3\right) \cos(\theta)} = \frac{1}{m_1^3 + \left(\frac{H_2^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_2} G} - m_1^3\right) \cos(\theta)}$$

$$\left(\frac{H_2^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_2} G} - m_1^3\right) \cos(\theta) = \left(\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_1} G} - m_2^3\right) \cos(\theta) + m_2^3 - m_1^3$$

$$\frac{H_2^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_2} G} = \frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_{i_1} G} - (m_2^3 - m_1^3) + \frac{m_2^3 - m_1^3}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{(r_{i_2} v_{i_2})^2}{v_{i_2}} = \frac{(r_{i_1} v_{i_1})^2}{v_{i_1}} + \frac{G(m_2^3 - m_1^3)(1 - \cos(\theta))}{(m_1 + m_2)^2 \cos(\theta)}$$

$$r_{i_2}^2 v_{i_2} = \left(\frac{m_2}{m_1} r_{i_1}\right)^2 v_{i_1} + \frac{G(m_2^3 - m_1^3)(1 - \cos(\theta))}{(m_1 + m_2)^2 \cos(\theta)}$$

$$v_{i_2} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_{i_1} + \frac{G(m_2^3 - m_1^3)(1 - \cos(\theta))}{(m_1 + m_2)^2 \cos(\theta) r_{i_2}}$$

N.B : nous avons ici utilisé $H_1 = r_{i_1} v_{i_1}$, mais étant constant en tout t, cette expression en v_{i_2} , v_{i_1} et r_{i_2} est également applicable en tout t.

Effectivement, lorsqu'on a $m_2 = m_1$, la relation se simplifie comme suit :

$$v_{t_2} = (1)^2 v_{t_1} + \frac{G \times 0 \times (1 - \cos(\theta))}{(m_1 + m_2)^2 \cos(\theta) r_{t_2}} = v_{t_1}$$

Les deux vitesses tangentielles sont bel et bien constantes en tout point. Seulement, lorsque qu'il existe un rapport k entre les deux masses tel que $m_2 = km_1$, on a :

$$v_{t_2} = k^2 v_{t_1} + \frac{Gm_1^3(k-1)(1-\cos(\theta))}{m_1^2(k+1)^2 \cos(\theta) r_{t_2}} = k^2 v_{t_1} + \frac{Gm_1(k-1)(1-\cos(\theta))}{(k+1)^2 \cos(\theta) r_{t_2}}$$

On remarque que le rapport entre les vitesses tangentielles n'est plus constant au cours du temps. On peut tout de même rechercher le lien entre les vitesses tangentielles initiales (à $\theta = 0$) afin de pouvoir établir des conditions initiales pour tout k :

$$v_{i_2} = k^2 v_{i_1} + \frac{Gm_1(k-1)(1-\cos(0))}{(k+1)^2 \cos(0) r_{i_2}} = k^2 v_{i_1}$$

On peut donc désormais appliquer un couple de couples de conditions initiales à notre simulateur afin de vérifier les assertions :

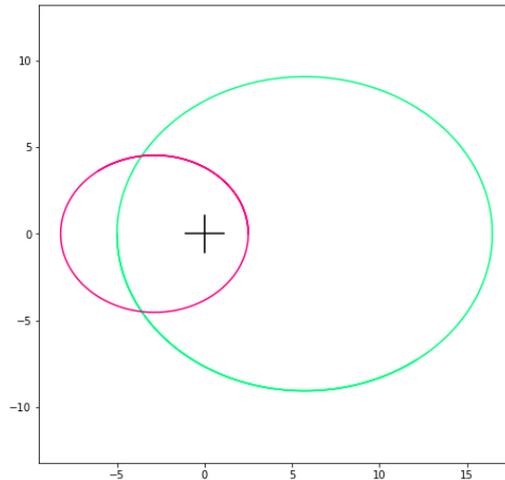


Figure 20 – Simulation du cas elliptique avec $m_2 = 2m_1$

Ici, P_2 est en magenta et P_1 en vert.

Cas de la trajectoire hyperbolique

Le cas hyperbolique correspond à la situation où les planètes s'éjectent, dû à un « trop plein énergétique ».

Ce cas ne dépend que de l'excentricité e , dépendante elle-même du couple de conditions initiales, variant selon le rayon initial r_i à la puissance 2 et selon la vitesse initiale v_i à l'ordre 1. On peut établir la condition selon laquelle le mouvement dégénère, donc la condition selon laquelle l'excentricité est supérieure ou égale à 1.

$$e \geq 1$$

$$\frac{H_1^2(m_1 + m_2)^2}{v_i G m_2^3} - 1 \geq 1$$

$$\frac{r_i^2 v_i (m_1 + m_2)^2}{G m_2^3} \geq 2$$

$$r_i^2 v_i \geq \frac{2Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

Lorsque cette condition est satisfaite, le mouvement dégénère et n'est alors plus périodique. On peut réaliser une application à travers notre programme de simulation :

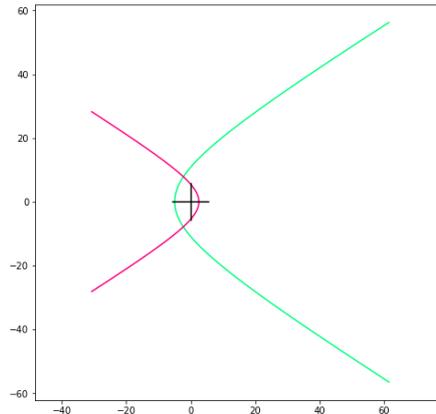


Figure 21 - La solution hyperbolique

Mais que se passe-t-il lorsque l'on tend vers $r_i^2 v_i = \frac{2Gm_2^3}{(m_1+m_2)^2}$?

Etude du point « instable » du problème à deux corps

On peut assimiler la trajectoire dont l'excentricité vaut 1 (le cas parabolique) comme le cas « instable » du problème à deux corps. Il s'agirait du cas limite, lorsque e augmente, pour lequel la trajectoire n'est plus assimilée à une ellipse mais ne dégénère pas. On peut tout d'abord déterminer l'équation de la trajectoire à ce moment précis :

$$r_1(\theta) = \frac{v_i \frac{2Gm_2^3}{(m_1+m_2)^2} \frac{(m_1+m_2)^2}{Gm_2^3}}{1 + \cos \theta} = \frac{2v_i}{1 + \cos \theta}$$

Avec v_i déterminée par l'expression conditionnelle de $e = 1$

On trace la trajectoire grâce au programme de simulation adapté au problème à deux corps.

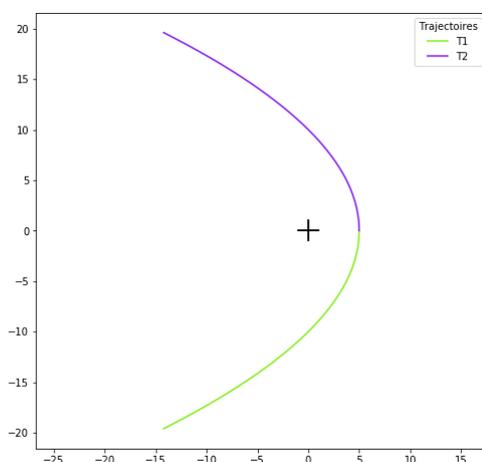


Figure 22 - Trajectoire parabolique

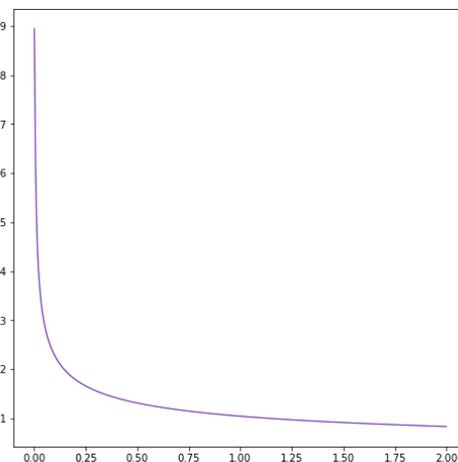


Figure 23 - Vitesse tangentielle sur 20 millions d'itérations

On remarque que la vitesse semble tendre vers 0 au fur à mesure que la planète s'éloigne (ou que le temps passe). Comme son énergie cinétique et son énergie potentielle tendent les 2 vers 0 à mesure qu'elle s'éloigne du barycentre attracteur, on peut supposer que son énergie mécanique est alors égale à 0. On peut vérifier cela grâce à la formule établie dans les outils mathématiques :

$$E_m = \frac{mr_1^2}{2} + \frac{L_1}{2mr_1^2} + \frac{mG}{r_1}$$

Or, dans le cas parabolique, $r_1 \rightarrow +\infty$ et $\dot{r}_1 \rightarrow 0$, donc E_m tend bel et bien vers 0.

Ce point de virement de trajectoire est-il donc réellement un point instable du problème à deux corps ? D'un point de vue de l'énergie mécanique, oui, car elle passe d'une valeur négative à une valeur positive. D'un point de vue topologique, oui, car la trajectoire passe d'une boucle fermée à une boucle ouverte. Cependant, d'un point de vue purement physique, le système n'est pas réellement voué à un sort complètement différent au vu du temps lorsqu'il passe d'une ellipse dont le demi-grand axe tend vers l'infini (donc dont la période de révolution tend également vers l'infini) à une trajectoire dont la « période de révolution » n'a certes plus de sens, mais peut tout simplement être assimilée à l'infini.

Ce point « instable » dont nous avons étudié la nature n'est donc pas physiquement un point instable, car il n'est pas particulièrement sensible aux conditions initiales du problème. On peut alors passer à l'étude du problème à trois corps, pour lequel la notion d'instabilité a une valeur tout autre.

Modélisation du Problème à Trois Corps

Expression mathématique du problème à trois corps

A l'instar du problème à deux corps, il est possible d'exprimer un système différentiel caractérisant le problème à trois corps, et ce à partir des mêmes outils que pour le problème à deux corps.

On considère donc les corps P_1 , P_2 et P_3 , de masses respectives m_1 , m_2 et m_3 . On note $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ la force exercée par le corps 2 sur le corps 1, $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ la force opposée exercée par le corps 1 sur le corps 2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Et ainsi de suite pour $\vec{F}_{1 \rightarrow 3}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$. Les coordonnées, vitesses et positions de chaque système sont notées $x_1, v_{x_1}, a_{x_1}, y_1, v_{y_1}, a_{y_1}, z_1, v_{z_1}, a_{z_1}$, etc. On note $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ les accélérations et $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ les positions de chaque système. On choisit de noter $d_a = \|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\|$ la distance entre les corps 1 et 2, d_b la distance entre 2 et 3, et d_c la distance entre les corps 1 et 3.

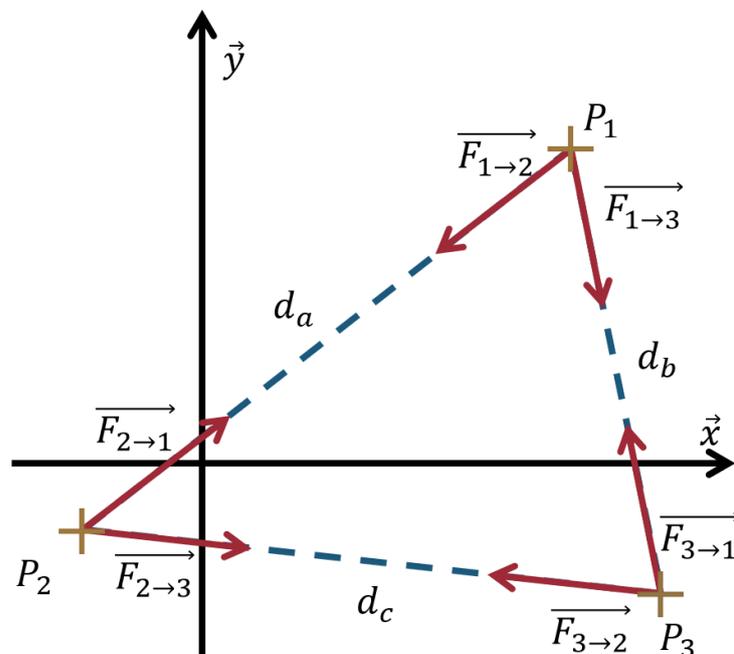


Figure 24 – Modélisation du problème des trois corps

En appliquant la seconde loi de Newton, on a donc :

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 3} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \\ m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_{3 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \frac{m_2 G}{d_a^2} \vec{u}_{1/2} + \frac{m_3 G}{d_c^2} \vec{u}_{1/3} \\ \vec{a}_2 = \frac{m_1 G}{d_a^2} \vec{u}_{2/1} + \frac{m_3 G}{d_b^2} \vec{u}_{2/3} \\ \vec{a}_3 = \frac{m_2 G}{d_b^2} \vec{u}_{3/2} + \frac{m_1 G}{d_c^2} \vec{u}_{3/1} \end{cases}$$

Avec $\vec{u}_{1/2} = -\vec{u}_{2/1}$ le vecteur unitaire de même direction que la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$; et ainsi de suite.

Or $\vec{u}_{1/2} = -\frac{1}{\|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\|} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$. La justification du signe est la même que pour le problème à deux corps : $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ est de sens opposé à la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et donc à son vecteur unitaire. En remplaçant, on obtient donc :

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = -\frac{m_2 G}{d_a^2} \frac{1}{d_a} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) + \frac{m_3 G}{d_c^2} \frac{1}{d_c} (\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \\ \vec{a}_2 = -\frac{m_1 G}{d_a^2} \frac{1}{d_a} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + \frac{m_3 G}{d_b^2} \frac{1}{d_b} (\vec{p}_2 - \vec{p}_3) \\ \vec{a}_3 = -\frac{m_2 G}{d_b^2} \frac{1}{d_b} (\vec{p}_3 - \vec{p}_2) + \frac{m_1 G}{d_c^2} \frac{1}{d_c} (\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \end{cases}$$

Ce qui donne, après simplification et séparation des composantes de chaque vecteur :

$$\begin{cases} a_{x_1} = -G \left(\frac{m_2}{d_a^3} (x_1 - x_2) + \frac{m_3}{d_c^3} (x_1 - x_3) \right) \\ a_{y_1} = -G \left(\frac{m_2}{d_a^3} (y_1 - y_2) + \frac{m_3}{d_c^3} (y_1 - y_3) \right) \\ a_{z_1} = -G \left(\frac{m_2}{d_a^3} (z_1 - z_2) + \frac{m_3}{d_c^3} (z_1 - z_3) \right) \\ a_{x_2} = -G \left(\frac{m_1}{d_a^3} (x_2 - x_1) + \frac{m_3}{d_b^3} (x_2 - x_3) \right) \\ a_{y_2} = -G \left(\frac{m_1}{d_a^3} (y_2 - y_1) + \frac{m_3}{d_b^3} (y_2 - y_3) \right) \\ a_{z_2} = -G \left(\frac{m_1}{d_a^3} (z_2 - z_1) + \frac{m_3}{d_b^3} (z_2 - z_3) \right) \\ a_{x_3} = -G \left(\frac{m_2}{d_b^3} (x_3 - x_2) + \frac{m_1}{d_c^3} (x_3 - x_1) \right) \\ a_{y_3} = -G \left(\frac{m_2}{d_b^3} (y_3 - y_2) + \frac{m_1}{d_c^3} (y_3 - y_1) \right) \\ a_{z_3} = -G \left(\frac{m_2}{d_b^3} (z_3 - z_2) + \frac{m_1}{d_c^3} (z_3 - z_1) \right) \end{cases}$$

Un point apparaît très vite évident : résoudre un tel système analytiquement est tout à fait contre-productif. On ne compte pas moins de 18 inconnues dans un système de 9 équations différentielles toutes interdépendantes. Il est clair que nous ne pouvons pas résoudre cela analytiquement, et il devient donc indispensable de trouver une autre méthode pour dépasser ce système complexe. Celui-ci ne nous est cependant pas inutile, bien au contraire, il sert de base à la méthode de résolution numérique que nous avons décidé d'utiliser. Nous allons donc construire une solution approximative des trajectoires à partir de méthodes numériques.

Méthodes de résolution numérique

Méthode d'Euler

➤ Principe mathématique

A partir d'un vecteur $Y(t_n)$ et de l'expression de la dérivée de $Y(t)$: $f(Y_n, t_n)$, on peut calculer $Y(t_{n+1}) = Y(t_n + h)$ de deux manières différentes :

- Formule d'Euler « explicite » :

$$Y(t_n + h) = Y(t_n) + hf(Y_n, t_n)$$

- Formule d'Euler « implicite » :

$$Y(t_n + h) = Y(t_n) + hf(Y_{n+1}, t_{n+1})$$

Cette dernière formule est plus complexe à mettre en place car Y_{n+1} est calculé à partir de lui-même, il faut donc des algorithmes plus complexes que pour la formule explicite.

➤ Principe géométrique

La méthode d'Euler se décompose donc en deux sous-méthodes qui approximent la courbe à obtenir.

La méthode dite « explicite » assimile l'aire proche de la courbe exacte de la fonction Y que l'on veut représenter entre deux points a et b , à un rectangle de largeur $|b - a|$ et de hauteur $|Y(a)|$. La portion ainsi représentée est *en dessous/au-dessus* de la courbe de Y si celle-ci est croissante/décroissante.

La méthode dite « implicite » quant à elle, présente un rectangle de même largeur que l'explicite, cependant on choisit cette fois-ci comme hauteur $|Y(b)|$. La portion ainsi représentée est cette fois-ci *au-dessus/en dessous* de la courbe de Y si celle-ci est croissante/décroissante.

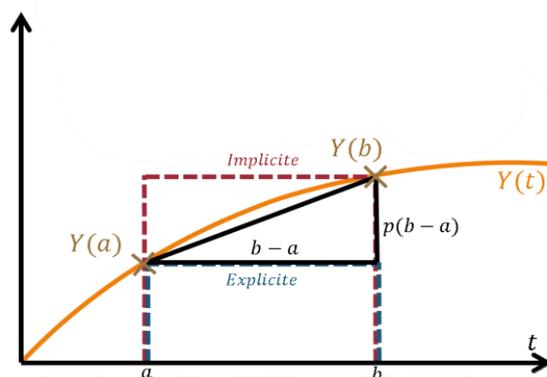


Figure 25 – Principe géométrique de la méthode d'Euler

➤ *Erreur*

L'erreur est représentée ci-dessus par chacune des méthodes par l'aire entre le rectangle et la courbe. Cette aire est assimilable à un triangle de hauteur $h \times p$ avec p le coefficient directeur de la tangente à la courbe en Y_n , et de largeur h (valable dans les deux cas, l'erreur est simplement de signe opposé d'une méthode à l'autre). L'aire du triangle ainsi formée est donc égale à $\frac{1}{2}ph^2$, ce qui correspond à l'erreur en valeur absolue pour une seule itération. Si on considère N itérations sur une période T , on a donc $N = \frac{T}{h}$, par conséquent l'erreur totale est égale à $\pm \frac{1}{2}Nph^2 = \pm \frac{1}{2}\frac{T}{h}ph^2 = \boxed{\pm \frac{1}{2}Tph}$.

L'erreur est donc de l'ordre du petit intervalle de temps h , on parle d'erreur d'ordre 1.

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2

➤ *Principe mathématique*

Ici, on considère l'aire entre deux points Y_n et Y_{n+1} sous la courbe de $Y(t_n)$ comme étant la moyenne de la somme de Y_n et Y_{n+1} multipliée par le petit intervalle de temps h .

$$Y(t_n + h) = Y(t_n) + \frac{1}{2}h(k_1 + f(t_n + h, Y_n + hk_1))$$

Avec $k_1 = f(t_n, Y_n)$.

➤ *Principe géométrique*

Cette fois-ci, on n'arrondit pas l'aire proche de la courbe à un rectangle mais à un trapèze. On réalise une moyenne entre la position qu'aurait dû avoir le point fictif Y_{n+1}^* à partir de la dérivée en Y_n et de la méthode explicite d'Euler, et la position qu'aurait dû avoir le second point fictif Y_{n+1}^{**} à partir de la dérivée en Y_{n+1}^* . Graphiquement, voilà à quoi cela correspond :

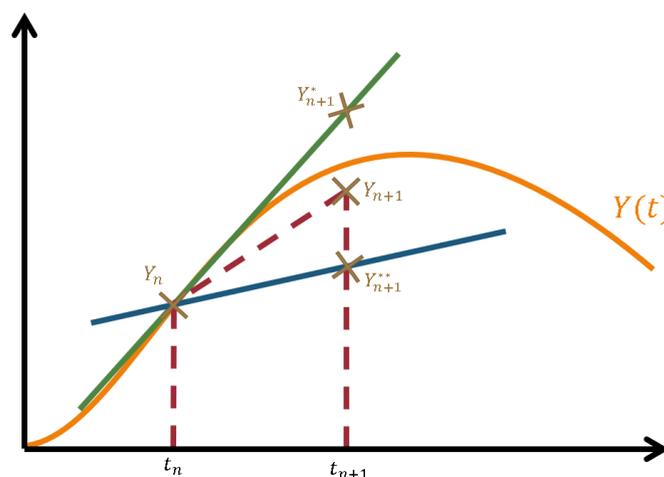


Figure 26 – Principe géométrique de Runge-Kutta à l'ordre 2

➤ *Erreur*

On veut ici calculer l'erreur engendrée par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2.

Soit $Y(t)$ l'ensemble de points que l'on souhaite définir. On ne connaît pas son expression, mais on connaît celle de sa dérivée $f : f(t, Y(t))$. On note Y_n le point au temps t_n c'est-à-dire $Y(t_n)$, et Y_{n+1} le point au temps $t_n + h$, h étant une petite variation de temps.

On a alors :

$$(1) \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, Y(t)) dt = Y(t_n + h) - Y(t_n).$$

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2 présente la relation suivante :

$$(2) Y(t_n + h) - Y(t_n) = \frac{1}{2} h \left(f(t_n, Y_n) + f \left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n)) \right) \right)$$

On propose ici d'étudier la différence entre la valeur exacte (1) et l'approximation (2), afin de calculer l'erreur que (2) engendre. On calcule donc la différence entre les courbes de chaque fonction par une intégrale :

$$(3) \int_{t_n}^{t_n+h} \left(Y(t_n + h) - Y(t_n) - \frac{1}{2} h \left(f(t_n, Y_n) + f \left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n)) \right) \right) \right) dt$$

Étant donné que l'expression sous l'intégrale est une somme de vecteurs (plus précisément des constantes en t_n), et pas de fonctions dépendant du temps, l'intégrale est donc égale à la valeur de cette somme de vecteurs multipliée par l'intervalle de temps voulu, à savoir h . On obtient donc :

$$(3) h \left(Y(t_n + h) - Y(t_n) - \frac{1}{2} h \left(f(t_n, Y_n) + f \left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n)) \right) \right) \right)$$

Il est intéressant de factoriser (3) par h , afin de faire apparaître des simplifications :

$$(3) h^2 \left(\frac{Y(t_n+h) - Y(t_n)}{h} - \frac{1}{2} \left(f(t_n, Y_n) + f \left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n)) \right) \right) \right)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on peut simplifier l'équation avec des équivalents :

$$(3a) \frac{Y(t_n+h) - Y(t_n)}{h} \sim f(t_n, Y_n)$$

$$(3b) f \left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n)) \right) \sim f(t_n + h, Y_n), \text{ car } f(t_n, Y_n) \text{ est une constante en } t_n$$

Par composition des équivalents, notre équation (3) devient (3*) :

$$(3*) h^2 \left(f(t_n, Y_n) - \frac{1}{2} \left(f(t_n, Y_n) + f(t_n + h, Y_n) \right) \right)$$

$$(3^*) -\frac{1}{2}h^2(f(t_n + h, Y_n) - f(t_n, Y_n))$$

Si on factorise de nouveau l'équation par h , on obtient alors :

$$(3^*) -\frac{1}{2}h^3 \left(\frac{f(t_n+h, Y_n) - f(t_n, Y_n)}{h} \right)$$

La fonction $f(t, Y_n)$ est une dérivée en un point, c'est donc une fonction affine qui s'exprime sous la forme : $f(t, Y_n) = \alpha t + Y_n$ avec $\alpha = cste$. Par définition, on a alors :

$$(3c) \frac{f(t_n+h, Y_n) - f(t_n, Y_n)}{h} = \alpha$$

On obtient donc finalement, lorsque le petit intervalle de temps h tend vers 0 :

$$\int_{t_n}^{t_n+h} Y(t_n + h) - Y(t_n) - \frac{1}{2}h \left(f(t_n, Y_n) + f\left(t_n + h, Y_n + h(f(t_n, Y_n))\right) \right) dt \sim -\frac{\alpha}{2}h^3$$

On peut ainsi apprécier la précision relative de l'approximation permise par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, avec une erreur de l'ordre de grandeur de h^3 pour un seul intervalle. Dans le cas d'itérations multiples, cet ordre de grandeur devient de h^2 pour la même raison que la méthode d'Euler.

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4

➤ Principe mathématique

Par rapport à la méthode d'ordre 2, on considère ici des points fictifs intermédiaires au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$, ce qui est impossible à calculer avec un programme, à moins de considérer un intervalle de temps h deux fois plus petit :

$$Y(t_n + h) = Y(t_n) + \frac{h}{6} (f(Y_n, t_n) + 4f\left(Y_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) + f(Y_{n+1}, t_{n+1}))$$

La formule exacte est donc approximée pour être exploitable par un programme (à partir des formules explicite et implicite d'Euler). L'écriture simplifiée de Runge-Kutta à l'ordre 4 s'écrit donc comme ceci :

$$Y(t_n + h) = Y(t_n) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} k_1 = f(Y_n, t_n) \\ k_2 = f(Y_n + hk_1, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_3 = f(Y_n + hk_2, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_4 = f(Y_n + hk_3, t_n + h) \end{cases}$$

➤ *Principe géométrique*

La formule exacte, passant par trois points (pas nécessairement alignés), est donc représentée par une pseudo-parabole.

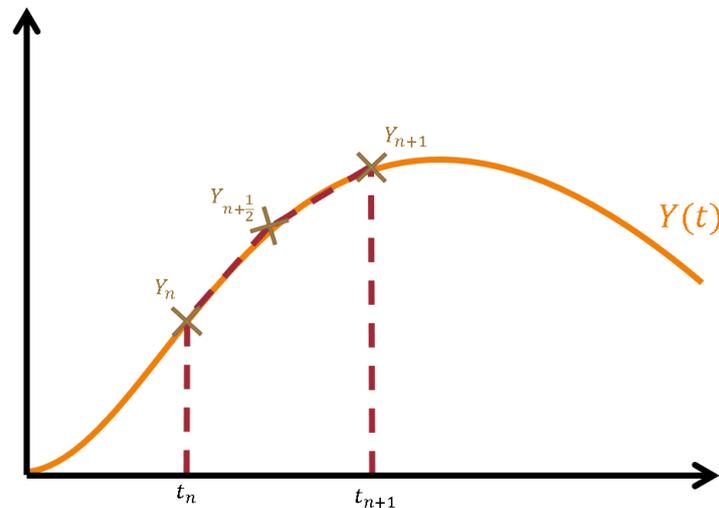


Figure 27 – Principe géométrique de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4

➤ *Implémentation*

Cette méthode est certes la plus précise de toutes, mais aussi la plus gourmande en ressources et en temps de processeur. Elle demande 3 fois plus d'opérations processeur pour chaque système à étudier ; elle est donc en moyenne 9 fois plus longue à exécuter.

L'erreur suscitée par cette méthode est plus faible encore que celle de l'ordre 2, puisqu'elle est de l'ordre de h^5 (admis).

Après étude mathématique des méthodes d'approximation numérique de systèmes différentiels, nous pouvons nous pencher sur la construction du programme de simulation.

Le programme de simulation

Construction du programme

➤ Cœur de calcul

Nous avons donc construit un programme dont l'objectif premier était de calculer et de représenter les trajectoires de trois systèmes gravitant les uns autour des autres. Comme nous avons pu le montrer auparavant, il n'existe pas de solution explicite à ce problème. Nous allons donc, comme vu dans la précédente partie, utiliser des méthodes d'approximation numérique, plus précisément dans notre cas les méthodes de Runge-Kutta à l'ordre 2 et 4.

Avant de pouvoir appliquer une quelconque méthode de calcul, il faut définir les vecteurs décrivant les composantes physiques de chaque planète. Le plus complexe fut de réduire au maximum le temps de calcul et le nombre de variables utilisées. En considérant nos trois corps dans l'espace, on comptait ainsi pas moins de 27 listes d'itérations (3 corps x 3 coordonnées x 3 ordres de dérivée), le tout à calculer sur n variations de temps. Nous avons donc décidé de faire recours à une liste tri-dimensionnelle (de largeur 3, de longueur 3 et de profondeur n) pour chaque corps, ce qui réduit la masse de variables à seulement 3 dans toute la résolution.

```
P1 = [['x', 'vx', 'ax'], ['y', 'vy', 'ay'], ['z', 'vz', 'az']]
P2 = [['x', 'vx', 'ax'], ['y', 'vy', 'ay'], ['z', 'vz', 'az']]
P3 = [['x', 'vx', 'ax'], ['y', 'vy', 'ay'], ['z', 'vz', 'ay']]
```

Voici donc les fonctions permettant de calculer la composante au rang n+1 par Runge-Kutta.

```
def intv(A,p,vi):
    v = (A*dt+vi)
    return v

def RK (P,n,a,order):
    rk = 0 #rk est la valeur de Y(n+1)
    tmp = []
    tmp.append(P[1][n])

    for i in range (1,order):
        #Calcul des composantes de RK par récurrence
        tmp.append(intv((((i+1)//2)/(order/2))*P[2][n-1],
            a+(((i+1)//2)/(order/2))*dt*tmp[i-1],P[1][n-1]))

    if (order == 2):
        rk = (tmp [0] + tmp[1])/2

    if (order == 4):
        rk = (tmp[0]+2*tmp[1]+2*tmp[2]+tmp[3])/6

    return rk
```

Chaque itération de calcul par Runge-Kutta est appelée à travers la fonction `trjclc`, elle-même appelée par le fil principal du programme comportant les conditions initiales et les paramètres massiques de chaque corps à simuler. Voici un extrait de cette fonction `trjclc` présente dans le programme de simulation du problème à deux corps (celle appliquée aux trois corps est très volumineuse, mais fonctionne sur le même principe). A noter que la fonction appliquée au problème à deux corps intègre déjà la méthode de Runge-Kutta dans ses calculs.

```
def trjclc(m,G,xi,vxi,yi,vyi) :
    #Ajout des conditions initiales
    x.append(xi)
    vx.append(vxi)
    y.append(yi)
    vy.append(vyi)
    ax.append((-1)*x[0]*m*G/(x[0]**2+y[0]**2)**(3/2))
    ay.append((-1)*y[0]*m*G/(x[0]**2+y[0]**2)**(3/2))

    for i in range(1, (int)(tmax/dt)): #Coeur du calcul
        a = x[i-1]
        b = y[i-1]
        vx.append(intv(ax[i-1],a,vx[i-1]))
        vy.append(intv(ay[i-1],b,vy[i-1]))
        x.append(a+dt*0.5*(vx[i]+dt*intv(ax[i-1],a,vx[i]))) #Calcul par
        y.append(b+dt*0.5*(vy[i]+dt*intv(ay[i-1],b,vy[i]))) #Runge-Kutta
        ax.append((-1)*x[i]*m*G/(x[i]**2+y[i]**2)**(3/2))
        ay.append((-1)*y[i]*m*G/(x[i]**2+y[i]**2)**(3/2))
```

En réalisant d'abord une simulation pour le problème à deux corps¹, pour vérifier si nos calculs de trajectoires étaient corrects, nous avons commencé à travailler le problème à trois corps.

L'utilisation de la méthode de Runge-Kutta a été un succès, et après quelques corrections à apporter au programme, nous avons retrouvé assez vite la trajectoire en 8 de Cris Moore², ce qui a confirmé l'exactitude du programme. Considérant ensuite nos trois corps comme trois points dans l'espace, on a donc pu ramener l'espace à un plan formé par ces trois points, enlevant ainsi une coordonnée et réduisant sensiblement le temps de calcul.

Maintenant, il faut rendre le programme pratique à l'utilisation, c'est pourquoi nous avons ajouté plusieurs fonctionnalités transversales utiles.

¹ Simulation ayant également servi à tracer les courbes que l'on peut retrouver dans [Le Problème à Deux Corps](#)

² Voir [Solution de Cris Moore](#).

➤ *Fonctionnalités transversales*

Afin d'exploiter au mieux le cœur de la simulation, nous avons ajouté ces petites fonctions indépendantes :

Tracé des différentes composantes dérivées

Ajout du tracé de la vitesse et de l'accélération, pour chaque planète, en fonction des itérations (indirectement en fonction du temps).

Pour la vitesse, par exemple, on crée une liste qui permettra de collecter au fur et à mesure que le calcul itère les vitesses tangentielles de chaque corps, alors appelée *Vit*, et construite selon l'égalité suivante : $Vit = [Vt1[t], Vt2[t], Vt3[t]]$.

```
Vit.append(list((Norme(P1[0][1][-1],P1[1][1][-1]),Norme(P2[0][1][-1],
                P2[1][1][-1]),Norme(P3[0][1][-1],P3[1][1][-1]))))
```

Chaque $X[-1]$ correspond à la valeur stockée dans la liste *X* à son tout dernier index.

La méthode est appliquée à l'identique pour l'accélération.

Afin de pouvoir visualiser les listes que nous calculions avec le programme, nous avons utilisé la bibliothèque *matplotlib*, permettant ainsi, comme le montre l'extrait de code suivant, d'imprimer efficacement une liste en fonction d'une autre sur un canevas.

```
trj = plot(x,y,color=(col[0],col[1],col[2]),label=nom)
trj = axis('equal')
trj = show()
```

Reprise des conditions finales afin de prolonger les courbes

Il a fallu introduire cette fonction lorsque les calculs sont devenus particulièrement coûteux en temps et qu'il arrivait que des trajectoires calculées manquaient de « temps simulé ».

```
def trjclc(NCI) :
    #Coeur du calcul
    return list((x[-1],y[-1],vx[-1],vy[-1]))

#Conditions initiales définies
NCI = [conditions initiales]
while (reprise ?) :
    NCI = trjclc(NCI)
```

A noter qu'ici les fonctions sont simplifiées pour la compréhension.

Tant que la condition de reprise est valide, la liste des conditions initiales *NCI* sera reprise par la fonction **trjclc** en paramètres et mise à jour par la liste qu'elle retourne (avec le **return**).

Détection de collision

```
#Coeur du calcul
if Norme(x[-1],y[-1]) < 0.1:
    print("Collision")
    break
```

Pour détecter les collisions, on s'appuie ici sur une valeur limite définie arbitrairement. Si la condition est remplie, on peut alors interpréter que, si celles-ci disposent d'un rayon physique égal à 0.5 unités, les planètes rentrent en contact. L'instruction `break` rompt alors la simulation.

Analyse du centre de gravité du système (ou du barycentre)

```
def CG(x1,x2,x3,y1,y2,y3):
    Cxm.append((x1+x2+x3)/3)
    Cym.append((y1+y2+y3)/3)
```

Parmi ces fonctions, nous pouvons par exemple nous servir de l'analyse du centre de gravité du système (supposé immobile) afin d'observer la précision de l'approche du théorique que le programme nous permet d'obtenir.

Exemple ici, avec la solution de Broucke A1¹, on observe un léger mouvement du barycentre.

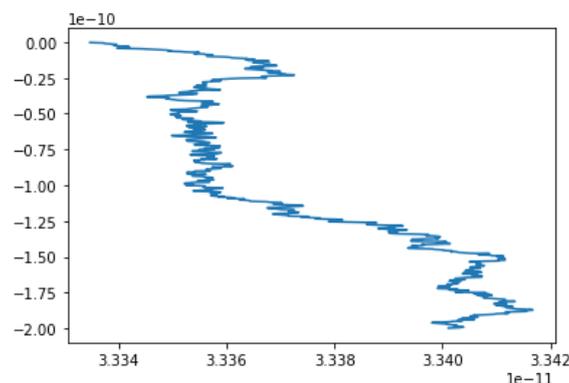


Figure 28 – Coordonnées du barycentre de la solution de Broucke A1 en fonction des itérations

Précision

La simulation de trajectoires par l'utilisation d'algorithmes est une méthode discrète, qui, contrairement à la méthode analogique, est fortement sujette à la précision utilisée. Dans une méthode analogique, une trajectoire serait définie par une fonction et existerait en tout point de l'intervalle de temps souhaité. La méthode discrète demande de tracer un nombre fini N de points, sur un intervalle de temps T . On définit donc $\frac{N}{T} = dt$, le petit intervalle de temps qui sépare deux points consécutifs de notre trajectoire.

¹ Voir [Broucke A1](#)

Mais où intervient la précision dans cette histoire ?

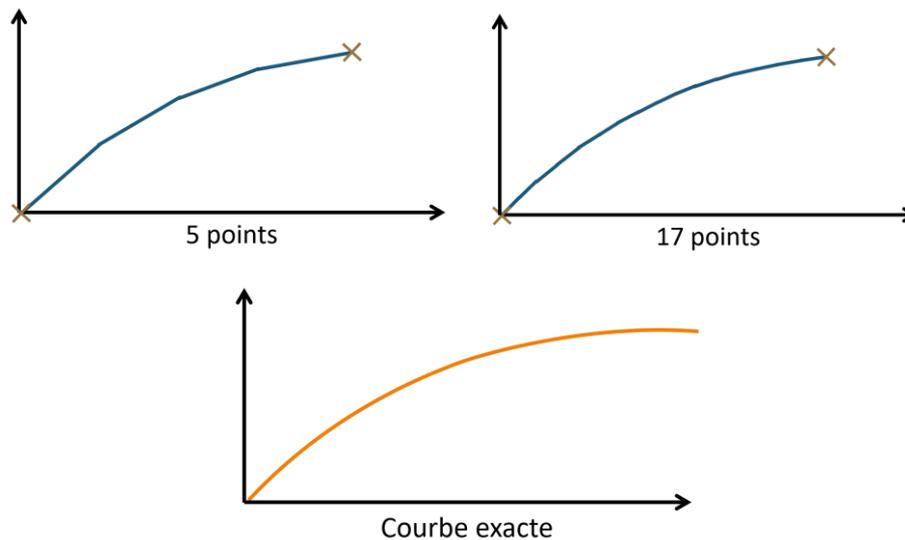


Figure 29 – Tracé de courbes avec diverses discrétisations

Plus on définit de points pour le calcul d'une trajectoire, plus le tracé reliant tous les points se rapproche de cette trajectoire. Ainsi, avec davantage de points, la trajectoire approximative se fait plus précise. C'est de cela dont on parle lorsque l'on évoque la précision. Calculer plus de points sur le même intervalle va donc forcément diminuer l'intervalle de temps dt dans les calculs. Pour être le plus proche possible de la réalité, il faut donc avoir un intervalle de temps quasi-négligeable et ainsi approcher une représentation analogique de la trajectoire.

Mais pourquoi la précision est-elle si importante pour le problème à trois corps ? Un nombre réduit de points devrait théoriquement avoir pour seules conséquences une trajectoire grossière, mais tout de même observable. Or ce n'est pas le cas, la précision a un rôle crucial dans la représentation du problème à trois corps.

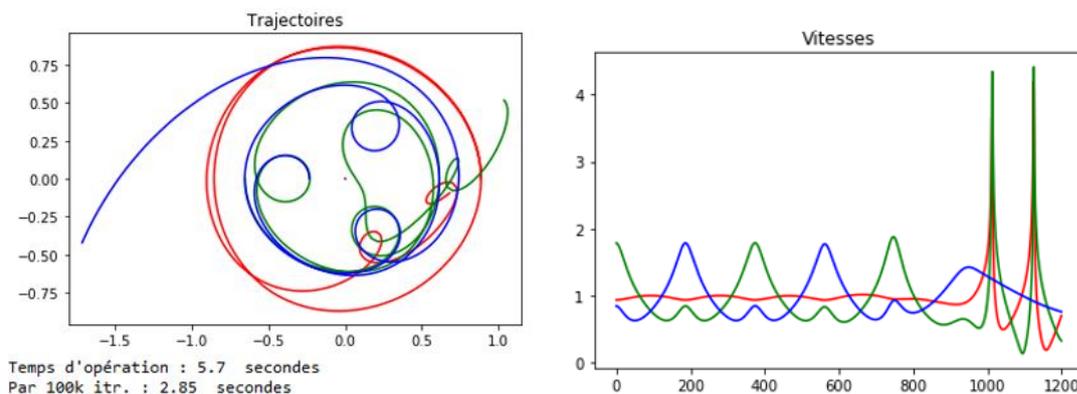


Figure 30 – Simulation dégénérée de Broucke R8 (précision 10^{-4} , $t_{max} = 12$)

La figure ci-dessus nous montre une trajectoire a priori stable malgré quelques lacets chaotiques en son sein. Cependant l'étude de la vitesse des systèmes montre que la vitesse oscille brutalement entre deux extrêmes et ce, après avoir suivi un comportement périodique,

ce qui peut signifier deux choses : ou ces systèmes se sont percutés/frôlés, ou ils ont été projetés. On peut prédire que l'ensemble ne restera pas longtemps stable et aboutira à une projection et/ou à une collision, si l'on augmente le t_{max} .

Observons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on augmente la précision, c'est-à-dire lorsque l'on réduit la valeur du petit intervalle de temps dt .

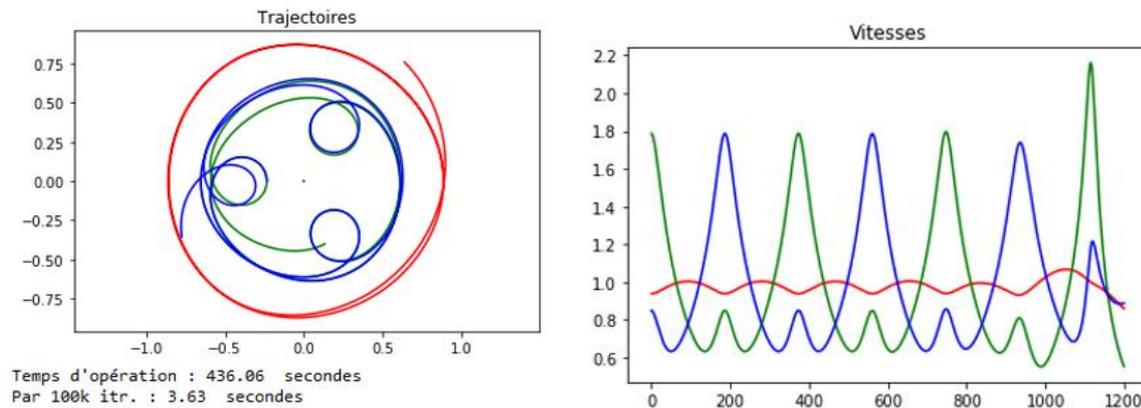


Figure 31 – Simulation tout juste dégénérée de Broucke R8 (précision 10^{-6} , $t_{max} = 12$)

On a donc augmenté la précision d'un facteur 100 par rapport à la figure précédente, pour une durée équivalente (on notera par ailleurs la multiplication par 100 du temps de calcul¹), et on observe cette fois-ci une trajectoire qui semble bien plus stable au premier abord. Cependant on note encore une fois un pic de vitesse à la fin de la simulation, bien que moins prononcé que pour la première figure. Analysons la même simulation, avec une période deux fois plus longue, afin d'observer son évolution.

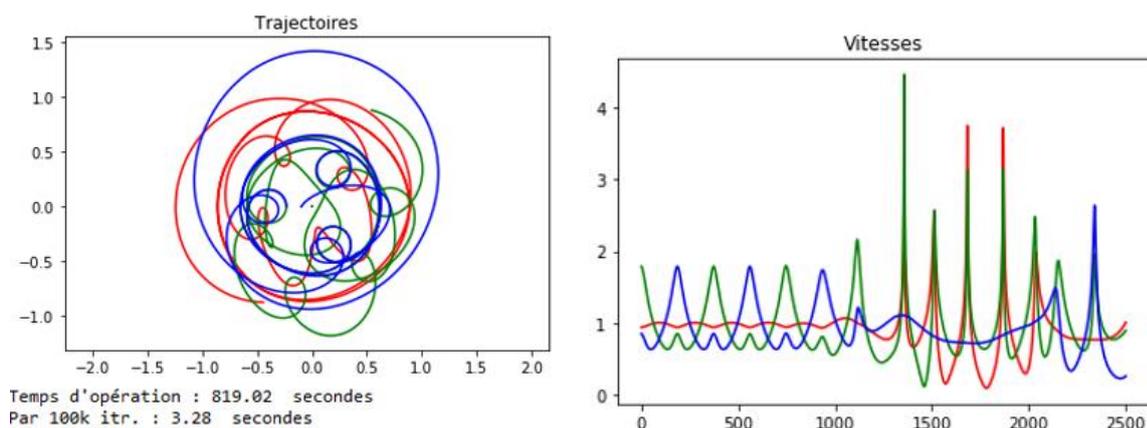


Figure 32 – Simulation dégénérée de Broucke R8 (précision 10^{-6} , $t_{max} = 25$)

On constate à nouveau une dégénérescence des trajectoires et des sauts de vitesse prononcés, l'ensemble n'est plus du tout stable.

¹ Voir [Aspect mémoire / temps de calcul](#)

Une évolution similaire aurait été observée sur la première figure à 10^{-4} . Or le résultat que l'on est censé obtenir est stable au cours du temps.

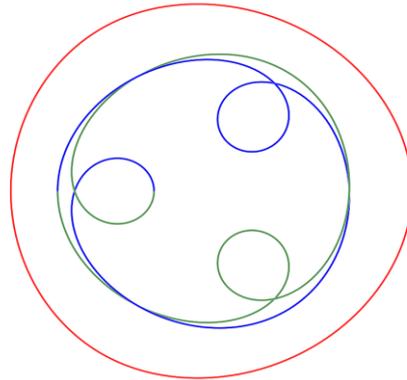


Figure 33 – Simulation théorique exacte de Broucke R8

Ainsi, la précision est primordiale pour obtenir des trajectoires non seulement proches de la réalité, mais aussi et surtout observables. La précision est plus que jamais nécessaire dans le problème à trois corps (particulièrement pour les solutions de type « chute libre »¹).

Aspect mémoire / temps de calcul

➤ *Calcul et mémoire*

Notre programme, dans sa première version, fonctionne sur le principe simple de calculer les listes de positions des planètes selon un temps de simulation t , une précision temporelle p , engendrant par simple quotient le nombre d'itérations à calculer nit (avec $nit = t/p$). Chacune des itérations calculées sont alors imprimées sur le canvas par matplotlib, ce qui engendre un temps d'affichage relativement grand lorsque l'on atteint plusieurs millions d'itérations.

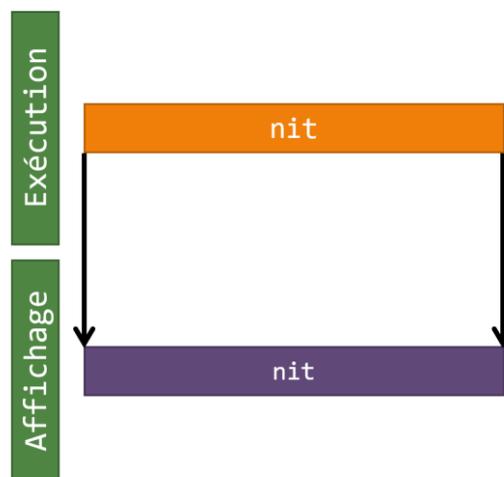


Figure 34 – Principe calcul/affichage de la première version du programme

¹ Voir [Solutions de type « Chute libre »](#)

Cette technique simple fonctionnait parfaitement jusqu'au moment où nous avons découvert des solutions nécessitant une précision faramineuse pour s'approcher de leur forme théorique. Il nous a donc fallu reconstruire le cœur de calcul du programme : en effet, les calculs devenant particulièrement volumineux au point de dépasser la mémoire vive d'un ordinateur en disposant 16 Go (lorsque le calcul dépassait les 30 millions d'itérations, environs). Nous avons sectionné l'exécution de la résolution numérique des trajectoires en plusieurs petites sections indépendantes que l'on appellera « Frames », que l'on délimite selon le plan suivant :

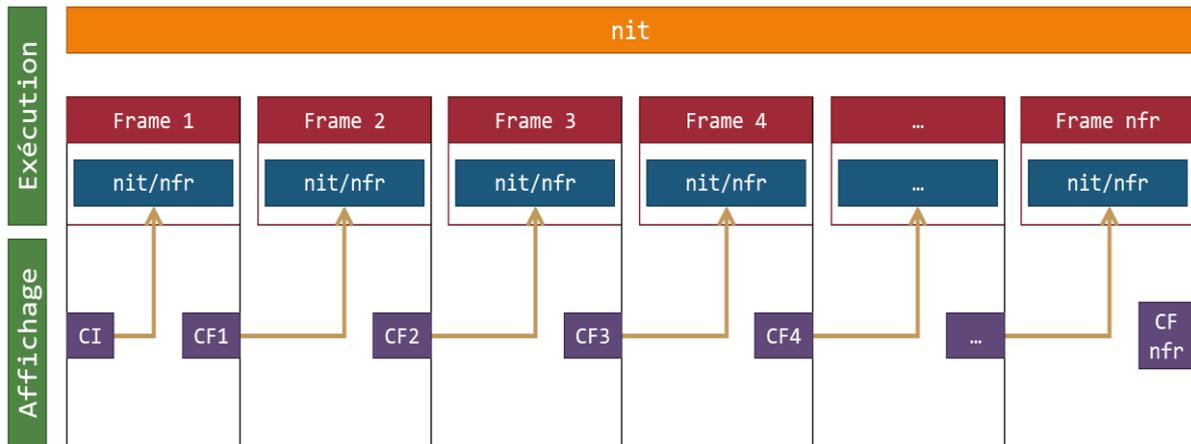


Figure 35 – Nouvelle organisation calcul/affichage

Bien que le nombre total d'itérations à calculer soit toujours égal à nit , on a désormais réduit et la quantité à afficher à nfr , et la charge des listes vectorielles à nit/nfr . Ainsi, au lieu de n'exécuter qu'une fois un calcul de nit itérations, on exécute nfr fois un calcul de nit/nfr itérations, en reportant à chaque fin de calcul les conditions finales au suivant, conditions finales que l'on récupère au passage dans la liste des positions à afficher. On a donc plus de précision tout en gardant la même quantité de mémoire vive et la même précision sur le graphique, pour un nfr suffisamment grand (en effet, il est inutile d'afficher 10 millions de points sur un canevas de 300x200 pixels).

Cette amélioration permettra d'augmenter la capacité de calcul disponible pour la même quantité de mémoire vive par un facteur carré. En effet, la mémoire vive permettant de stocker au maximum environs 30 millions d'itérations de calcul, on peut calculer, avec une répartition optimale, un nombre maximal d'itérations de l'ordre de 2.25×10^{14} itérations, soit 225 Tera-itérations. Encore faut-il avoir le temps de les calculer...

➤ Calcul et temps d'opération

Afin de pouvoir modéliser une courbe sur notre simulateur, il a parfois fallu exécuter sur plusieurs heures, surtout lorsque la courbe nécessitait une précision extrêmement fine. Afin de pouvoir prédire le temps de calcul du programme, nous avons alors créé un indicateur, que l'on appelle le t_{100k} , le temps requis par le programme pour générer 100 000 itérations de calcul, chaque itération correspondant à un infime intervalle de temps simulé appliqué aux accélérations de chaque planète.

Lors des débuts du programme, ce temps était relativement facile à déterminer. Il suffisait, à l'aide de la fonction `process.time()` de la bibliothèque `time`, de relever les temps processeur juste avant et juste après l'opération. La différence entre ces deux temps, divisée de 100000 donne alors la valeur de t_{100k} . Cette valeur étant constante tant que le cœur de calcul ne changeait pas, il suffisait alors de la multiplier au nombre d'itérations `nit` pour obtenir une estimation du temps que prendra le prochain calcul.

Seulement, après l'amélioration du cœur sur le principe des frames, l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre d'itérations s'est révélée beaucoup plus chaotique. Nous avons donc tenté d'observer s'il pouvait tout de même y avoir un lien en implémentant rapidement une fonction d'enregistrement des données de calcul dans un fichier csv, par les lignes de code suivantes :

```
with open('Top1.csv', mode='a') as file_:
    file_.write("{} , {} , {}".format(round(nit,0), round(nit/nframes,0),
    round(t100k/(nit),5)))
    file_.write('\n')
```

Grâce à Excel, nous avons pu importer et actualiser cette base de données, et tenter de trouver une relation pertinente entre chacun. La plus sensée d'entre elles a été l'expression t_{100k} en fonction de $\log(\text{nit})$, qui nous permet d'obtenir le graphique suivant :

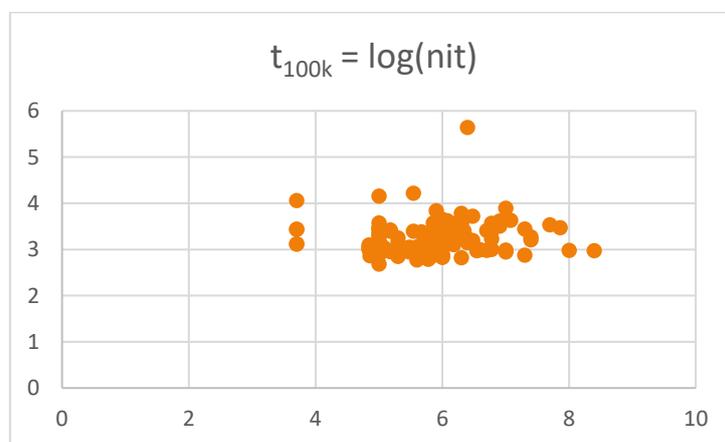


Figure 36 – $t_{100k} = \log(\text{nit})$ relevé sur 149 calculs appliqués à la même version du programme

Il est difficile de conclure une relation, qu'elle soit linéaire, exponentielle ou polynomiale (etc...) permettant de lier ces deux grandeurs. Ainsi, et ce par manque de temps, nous nous sommes résolus au fait que nous ne pouvons pas prédire avec fiabilité le temps qu'allait prendre le programme pour calculer sur la base des frames.

Notre programme est maintenant capable de simuler des trajectoires sur un nombre d'itérations faramineux. Nous pouvons alors commencer les expérimentations.

Etude des trajectoires solution

Une solution triviale

Avant de se restreindre à l'observation de solutions numériques, nous pouvons déterminer analytiquement quelques solutions du problème à trois corps très particulières, en s'appuyant sur l'étude analytique des solutions du problème à trois corps.

En considérant, comme pour le problème à deux corps, le référentiel barycentrique du système, on peut déduire une solution triviale de trajectoires : la solution circulaire.

Dans le cas où les planètes sont pourvues de masses égales, la trajectoire circulaire peut être définie physiquement par son rayon r_k et la vitesse tangentielle constante qu'ont toutes les planètes. On peut alors résoudre analytiquement le problème.

On isole le barycentre pour obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k \overrightarrow{F_{k \rightarrow b}} = 0 \\ \overrightarrow{F_{b \rightarrow k}} = \frac{m_k v_{t_k}^2}{r_k} \overrightarrow{e_{kb}} \end{array} \right.$$

(avec $\overrightarrow{e_{1b}}$ le vecteur directeur planète 1 – barycentre et $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow b}}$ la force exercée par la planète 1 sur le barycentre, par exemple)

La première équation étant tirée du principe fondamental de la statique (ou la première loi de Newton), et la seconde étant tirée du principe fondamental de la dynamique (ou la seconde loi de Newton), avec pour seule accélération considérée, l'accélération centripète. Dans la recherche de solutions, nous allons cette fois également composer avec le barycentre du système. On pourra alors établir des relations entre les rayons planète-barycentre selon l'expression suivante :

$$m_1 r_1 \overrightarrow{e_{b1}} + m_2 r_2 \overrightarrow{e_{b2}} + m_3 r_3 \overrightarrow{e_{b3}} = \vec{0}^1$$

➤ Résolution analytique

On peut alors développer le système en décrivant chaque $\overrightarrow{F_{b \rightarrow k}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G m_b m_1}{r_1^2} \overrightarrow{e_{b1}} + \frac{G m_b m_2}{r_2^2} \overrightarrow{e_{b2}} + \frac{G m_b m_3}{r_3^2} \overrightarrow{e_{b3}} = 0 \\ \frac{G m_b m_k}{r_k^2} = \frac{m_k v_{t_k}^2}{r_k} \end{array} \right.$$

¹ Voir [Le Barycentre](#)

$$\begin{cases} \frac{m_1}{r_1^2} \vec{e}_{b1} + \frac{m_2}{r_2^2} \vec{e}_{b2} + \frac{m_3}{r_3^2} \vec{e}_{b3} = 0 \\ r_k v_{t_k}^2 = G m_b \end{cases}$$

On peut alors tirer de ce système d'équations l'égalité suivante :

$$r_1 v_{t_1}^2 = r_2 v_{t_2}^2 = r_3 v_{t_3}^2 = G m_b$$

Condition que l'on pourra appliquer une fois que l'on aura déterminé le placement relatif de chaque planète (intuitivement chacune répartie aux sommets d'un triangle équilatéral) de manière analytique. Pour que le système soit stable, donc pour que le barycentre subisse à tout moment un bilan des interactions égal à 0, il faut que chaque planète subisse un bilan des interactions également nul à tout moment (dans le cas de la solution circulaire).

On peut alors modéliser les interactions :

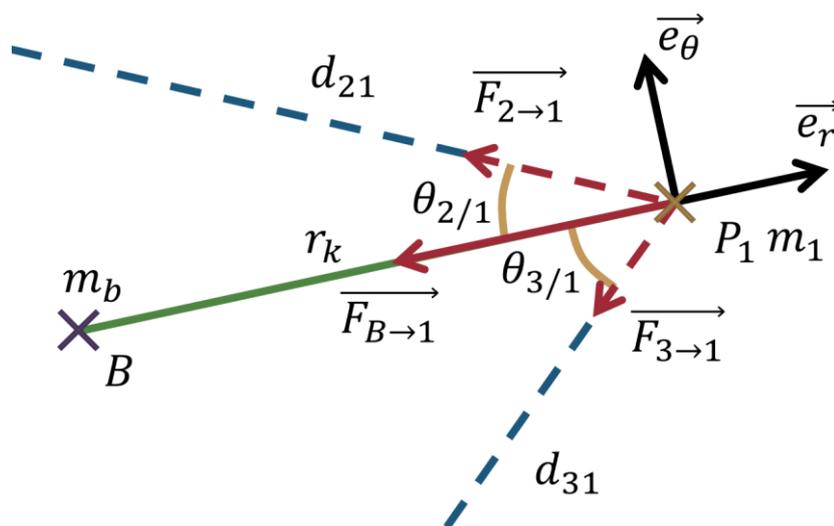


Figure 37 – Modélisation du bilan des forces sur la planète 1

Par définition, dans le cas circulaire, on a non seulement $\vec{F}_{2 \rightarrow k} + \vec{F}_{3 \rightarrow k} = \vec{F}_{B \rightarrow k}$, mais aussi $\vec{F}_{2 \rightarrow k} = \vec{F}_{3 \rightarrow k}$ (la composante d'accélération en \vec{e}_θ est nulle)

Par le théorème d'Al-Kashi, ces trois vecteurs s'additionnant dans un triangle forment des angles orientés déterminés par la relation suivante :

$$\frac{\|\vec{F}_{B \rightarrow 1}\|}{(\vec{F}_{B \rightarrow 2}, \vec{F}_{B \rightarrow 3})} = \frac{\|\vec{F}_{B \rightarrow 2}\|}{(\vec{F}_{B \rightarrow 1}, \vec{F}_{B \rightarrow 3})} = \frac{\|\vec{F}_{B \rightarrow 3}\|}{(\vec{F}_{B \rightarrow 1}, \vec{F}_{B \rightarrow 2})}$$

➤ *Solution circulaire en masses égales*

On remarque immédiatement que si $\|\vec{F}_{B \rightarrow 1}\| = \|\vec{F}_{B \rightarrow 2}\| = \|\vec{F}_{B \rightarrow 3}\|$, donc si $\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2} = \frac{m_3}{r_3^2}$ (chaque r_k étant alors égal à chacun, on peut simplement considérer $m_1 = m_2 = m_3 = m_k$), on a égalité entre chaque angle orienté entre les différents vecteurs.

Géométriquement, cela signifie que les trois forces, additionnées, forment un triangle équilatéral. Par extension, les trois planètes forment un triangle équilatéral dont les sommets sont occupés par chaque planète. Enfin, on résout le lien entre les composantes du couple de conditions initiales pour chaque planète P_k :

$$r_k v_{t_k}^2 = G m_B$$

$$v_{t_k} = \sqrt{\frac{3Gm_k}{r_k}}$$

➤ *Application de la solution circulaire avec $m_1 = m_2 = m_3 = m_k$*

Nous avons la définition complète des conditions initiales de chaque planète, on peut alors tester tout cela grâce au simulateur.

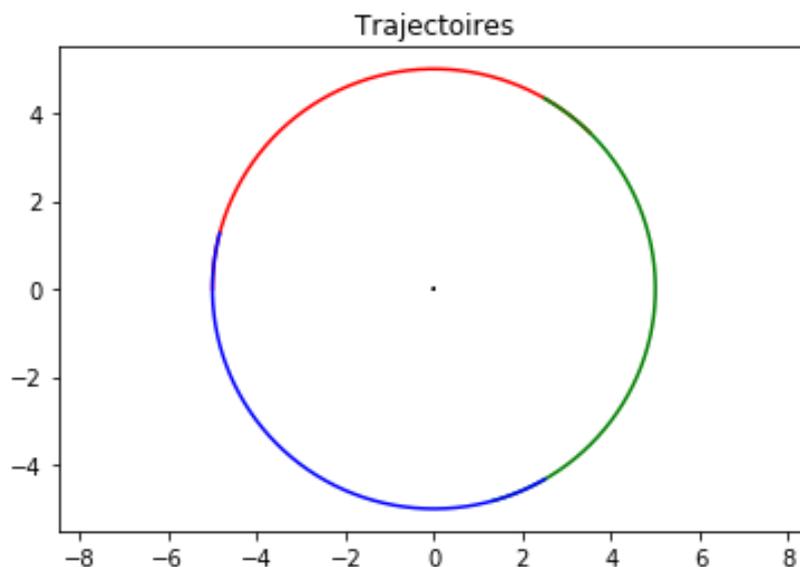


Figure 38 – Solution circulaire toutes masses égales sur $T/3$

Cette trajectoire solution est dite **chorégraphique** : chaque planète emprunte exactement la même trajectoire.

➤ *Généralisation des solutions*

Le problème à trois corps a bien une similarité avec le problème à deux corps : l'énergie dont dispose le système, sur un temps tendant vers l'infini, est **toujours constante**.

Les composantes de cette énergie, soit le couple énergie gravitationnelle-inertielle sont alors impliquées dans un jeu d'échanges périodiques qui parfaitement équitables qui, à vue d'un temps suffisamment grand, n'ont aucune répercussion.

Lorsque chaque planète suit la même trajectoire au coefficient massique près (qui était la solution générale au problème à deux corps, mais ici qu'une solution spécifique), cet échange est synchronisé à l'échelle du système : soit toutes les planètes se perdent de l'énergie gravitationnelle et gagnent en inertielle (ils se rapprochent du centre du système), et vice versa.

Dans ces conditions de synchronisation bien spécifiques, on peut considérer le problème à trois corps comme 3 problèmes à 1 corps, étant donné que toutes les planètes ont à chaque instant la même vitesse radiale (elles agissent alors comme un ensemble). Ce qui fait que la solution conique est une solution du problème à trois corps. Malheureusement et par manque de temps, nous ne nous pencherons pas sur l'étude analytique de cette solution, bien qu'elle soit exactement identique à celle que nous avons pu développer dans l'étude des solutions du problème à deux corps.

Voici tout de même quelques simulations montrant des cas de solution de trajectoire purement conique :

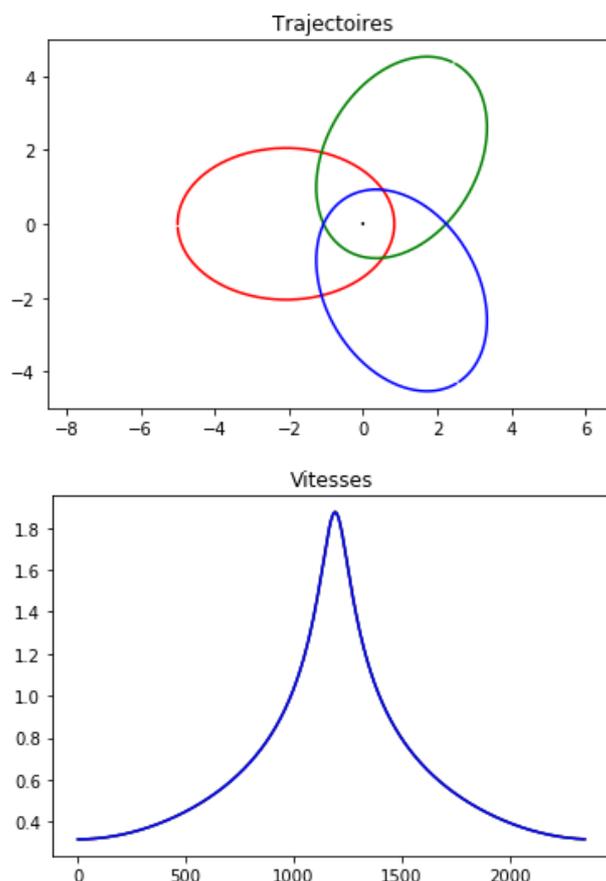


Figure 39 - Une solution elliptique du problème à trois corps à masses égales

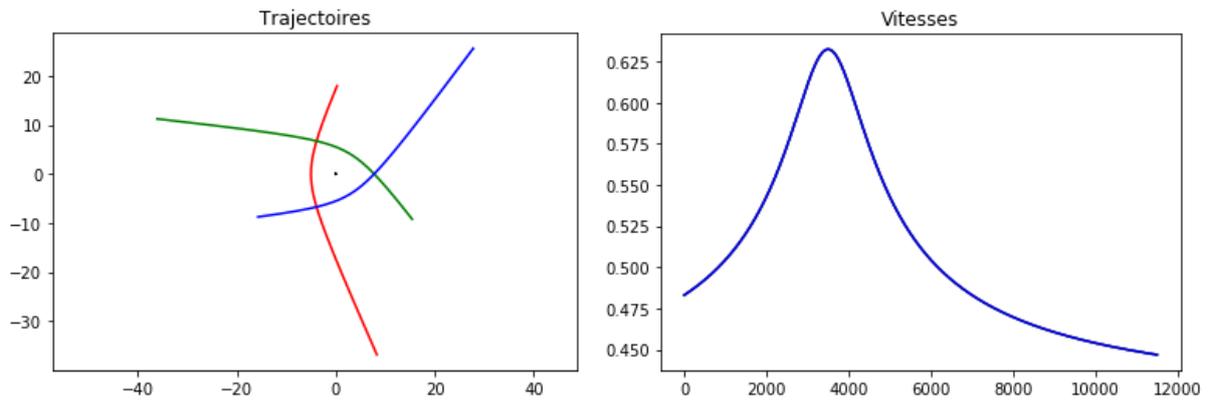


Figure 40 - Une solution hyperbolique du problème à trois corps à masses égales

On retrouve bien l'unicité des vitesses des planètes, et donc l'unicité des vitesses angulaires (car les rayons r_k sont identiques à tout moment et $\dot{\theta} = rv_t$).

Solution de Cris Moore

Cris Moore, scientifique originaire du New Jersey, établit en 1993 une trajectoire solution symbolique dans la résolution du problème à trois corps : la trajectoire « en forme de huit ». C'est l'une des premières solutions non-triviales du problème à trois corps à avoir été algébriquement prouvée. Cette trajectoire est partagée par chacun des corps (de masses équivalentes) selon un « 8 » stable dans le temps. Nous avons pu reproduire cette trajectoire sur notre simulateur :

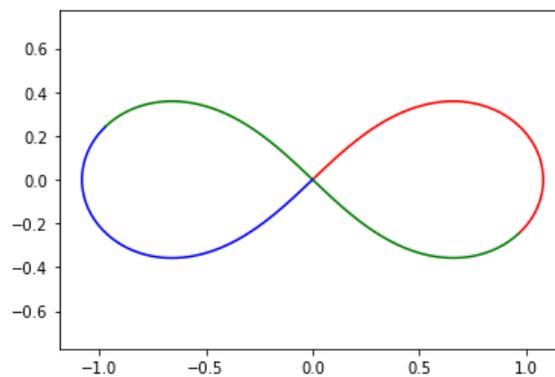


Figure 41 – La solution « Figure 8 »

Cette trajectoire suppose des masses égales et une précision de l'ordre de 10^{-8} pour les positions et les vitesses initiales. A noter toutefois que l'image ci-dessus traduit le tiers de période nécessaire pour qu'un corps retourne à sa position initiale (les trajectoires se rencontrent pour la première fois), mais que pour un nombre de périodes indéfini, la trajectoire est censée être toujours la même.

Nous avons ensuite pu étudier la stabilité de cette forme de trajectoires en appliquant de petites perturbations sur les conditions initiales de l'un des astres (chaque perturbation est appliquée sur la composante x du corps dont la trajectoire est représentée en rouge). Les positions initiales de chaque corps sont de l'ordre de 1. Voici donc ce que l'on obtient avec une série de perturbations successives, avec des périodes plus ou moins longues :

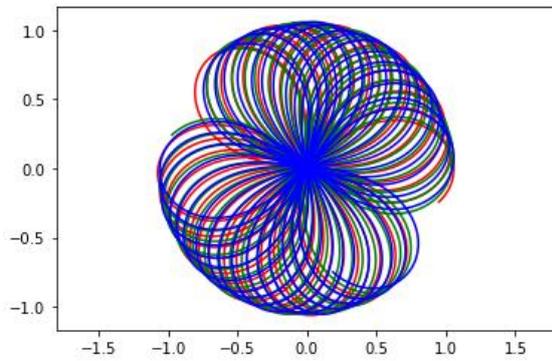


Figure 42 – Perturbation 0.02 (t = 100)

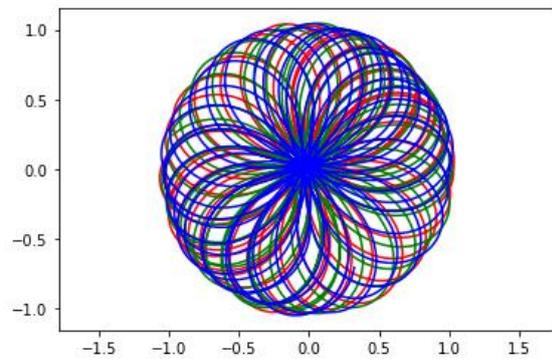


Figure 43 – Perturbation 0.04 (t = 100)

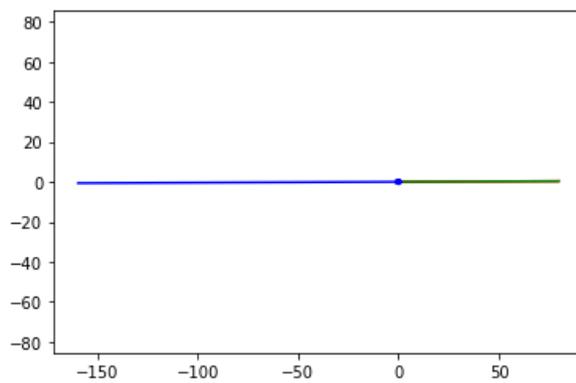


Figure 44 – Perturbation 0.06 (t = 100)

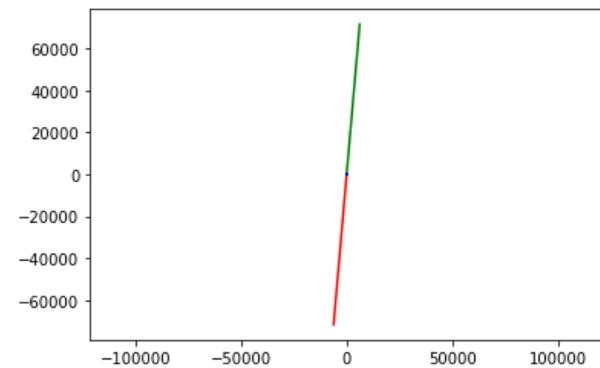


Figure 45 – Perturbation 0.08 (t = 100)

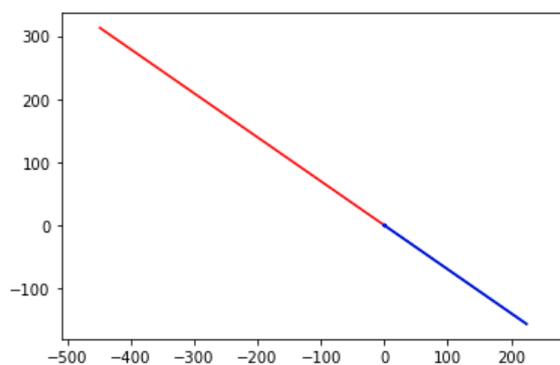


Figure 46 – Perturbation 0.1 (t = 100)

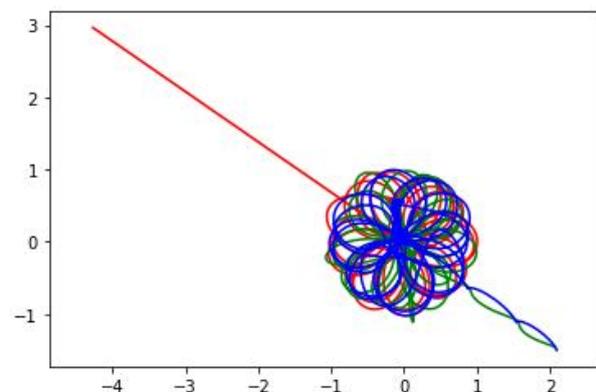


Figure 47 – Perturbation 0.1 (t = 50)

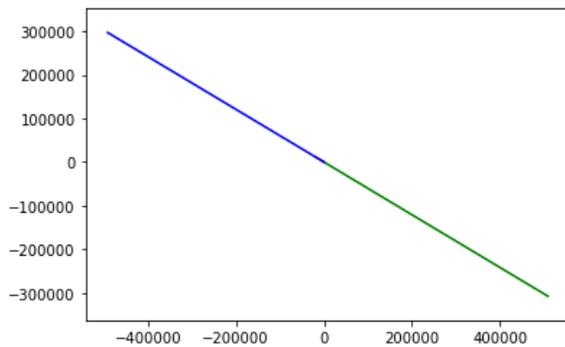


Figure 48 – Perturbation 0.04 (t = 300)

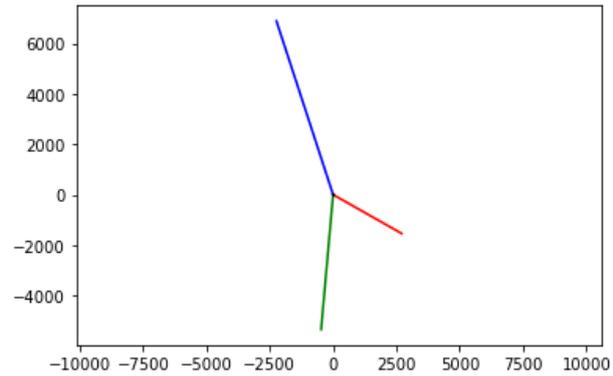


Figure 49 – Perturbation 0.02 (t = 900)

On pourrait observer que pour n'importe quelle perturbation, même la plus infime, le système finit forcément par devenir instable à partir d'un certain temps t . Ce que nous montre cette expérience est que la solution exacte en 8 est particulièrement sujette à des variations de conditions initiales. Cela semble indiquer que ce cas de figure est soumis à la théorie du chaos, sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Lors de plusieurs tests sur les conditions initiales, un cas en particulier a révélé un comportement différent des autres cas. Pour une perturbation de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, etc, le système aboutit tôt ou tard à une projection. Mais pour une perturbation de 1.5, on observe des trajectoires à la fois chaotiques et stables, pour des périodes comparables à celles utilisées précédemment. Passé cette perturbation de 1.5, on retrouve des projections. Bien entendu, il est possible qu'au bout d'une longue période t , le cas devienne instable comme tous les autres, mais il est curieux de constater une telle exception au milieu d'autres cas tous instables. Il est probable que ce cas soit assimilable à celui de Broucke A10¹.

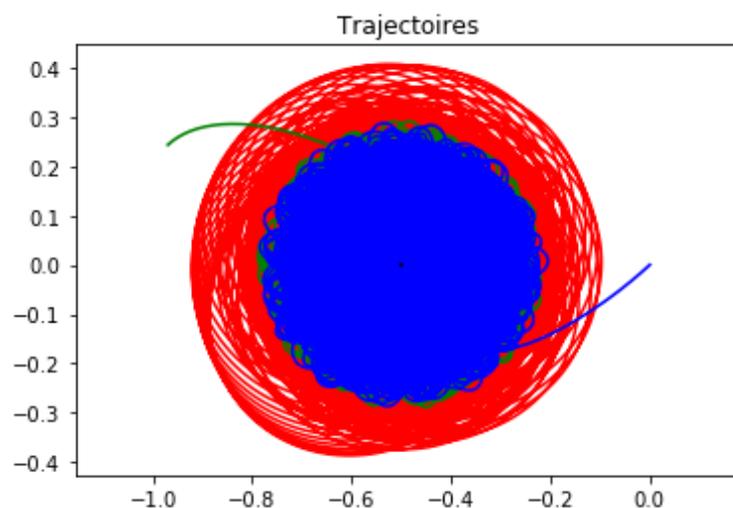


Figure 50 – Perturbation 1.5 (t = 1000)

¹ Voir [Broucke A10 et ses perturbations](#)

On constate pour l'instant une tendance dégénérative de l'instabilité beaucoup plus prononcée que pour le problème à deux corps. En effet, la moindre déviation d'un astre est amplifiée à chaque instant par la déviation des autres astres qui suivent la tendance, ce qui agit encore plus sur la déviation de la première, etc, etc.

Solutions de Broucke

Les 28 solutions de Broucke se distinguent des autres solutions vues jusqu'ici. En effet, ces dernières illustraient une chorégraphie, or ce n'est pas le cas des solutions de Broucke. Les trois systèmes de ces solutions ne partagent pas la même trajectoire, et c'est même souvent le cas pour deux systèmes deux à deux distincts. Commençons tout d'abord avec le cas Broucke A1.

➤ *Broucke A1*

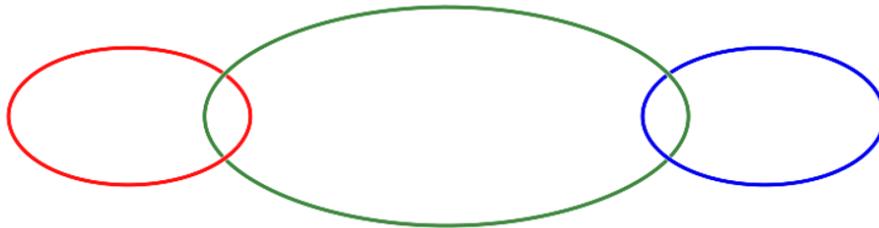


Figure 51 – Solution de Broucke A1

Cette solution est unique en son genre au sein des solutions de Broucke, puisque toutes les trajectoires n'ont pas le même attracteur (c'est-à-dire le centre géométrique d'une trajectoire). Toutes les autres solutions de Broucke admettent un unique attracteur pour les trois trajectoires (Broucke R1 est peut-être une autre exception, nous n'avons pas réussi à déterminer si son attracteur est unique ou non).

➤ *Broucke A2 (et autres Broucke A-)*

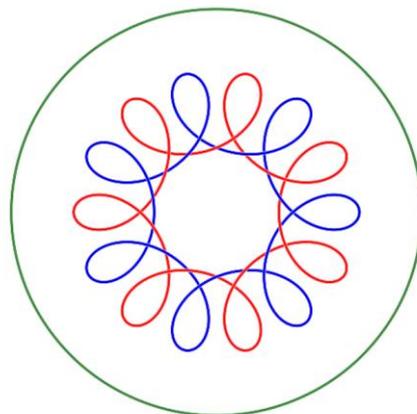


Figure 52 – Solution de Broucke A2

Les solutions de Broucke AN ($N \geq 2$) ont toutes en commun deux choses :

- ➔ La structure de leur figure est constituée d'un corps (toujours le même) sur une orbite extérieure circulaire ou pseudo-circulaire, et de deux corps sur une orbite intérieure en lacets¹
 - ➔ Les deux corps de l'orbite intérieure peuvent être rassemblés en un seul et même corps dont le barycentre décrit un cercle parfait² ; la trajectoire de l'un de ces corps par rapport à l'autre est un cercle de rayon constant (conjecture).
- *Broucke A10 et ses perturbations*

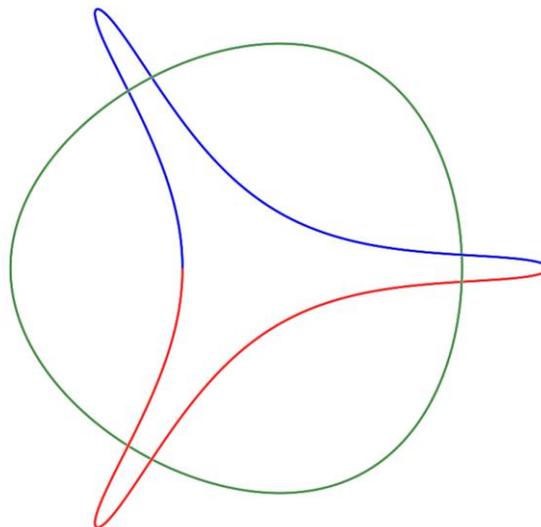


Figure 53 – Solution de Broucke A10

La solution de Broucke A10 obéit aux mêmes spécificités que les autres Broucke A-, mais on a cependant pu observer qu'elle est particulièrement stable, c'est-à-dire qu'elle est peu sensible aux perturbations sur les conditions initiales ou à la précision. Voici quelques exemples.

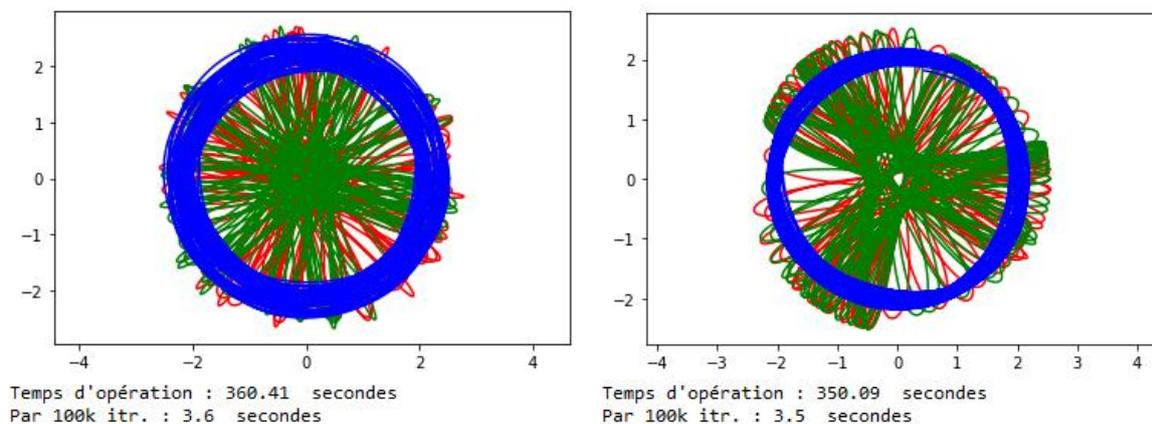


Figure 54 - Solution de Broucke A10 (perturbation de 0.1 à gauche, 0.5 à droite ; $t_{max} = 1000$)

¹ Voir [Notion de hiérarchie](#)

² Voir les trajectoires de Broucke A en mouvement sur [Observable : Planar Three-Body Problem Orbits](#)

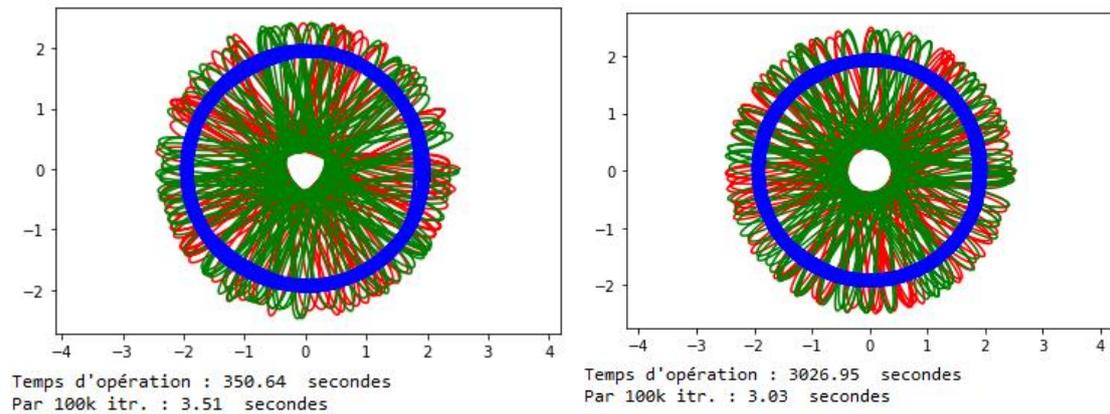


Figure 55 - Solutions de Broucke A10 (aucune perturbation, précision 10^{-4} à gauche, précision 10^{-5} à droite, $t_{max} = 1000$)

On note qu'encore une fois, nous n'avons pas pu obtenir la simulation théorique exacte, à cause de la précision. Cela ne semble toutefois pas avoir d'influence sur la stabilité du système, même si l'allure n'est pas la même. Ce cas est très similaire à celui vu plus haut avec la perturbation de la figure 8¹. Étonnamment, on remarque alors qu'après un très grand temps de simulation, aucune éjection ou déstabilisation n'est à déplorer.

➤ *Broucke R-*

Il existe une autre famille de solutions de Broucke (les Broucke R-) dont les caractéristiques sont assez proches de celles de Broucke A- (exemple avec Broucke R8²), la seule différence entre les deux familles de solutions est le sens de rotation des corps de l'orbite intérieure.

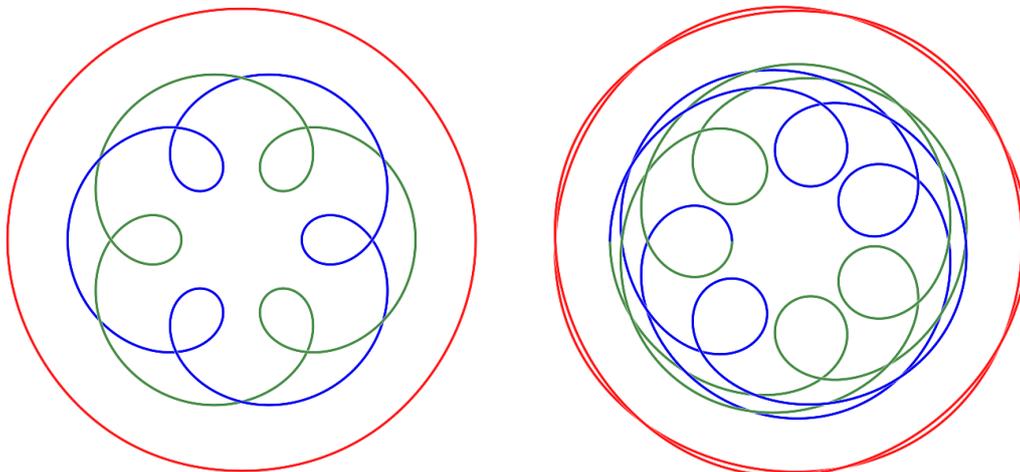


Figure 56 - Solutions de Broucke R3 (gauche) et Broucke R13 (droite)

¹ Voir [Solution de Cris Moore](#)

² Voir [Précision](#)

Solutions de type « Tendance binaire »

Lorsque l'on tentait d'observer des solutions du type Broucke R8, solution particulièrement instable, nous avons assisté à la conversion du système trinaire auquel on avait affaire en un système d'apparence binaire.

Voici le détail du moment où la trajectoire normalement apparentée à une solution de Broucke R8 a dégénéré en solution à tendance binaire :

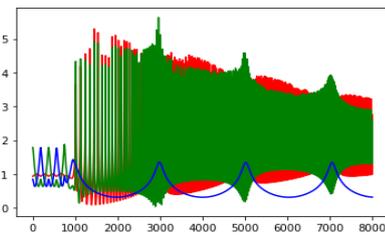
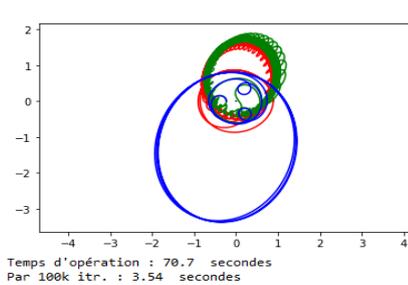


Figure 57 - Dégénération à basse précision

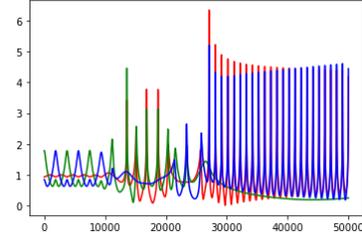
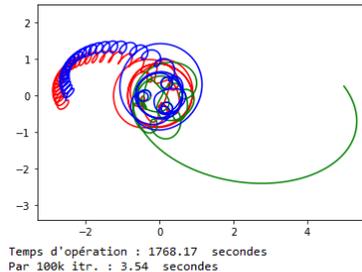


Figure 58 - Dégénération sur $t = 50, p = 10^{-6}$

En remarquant cela, nous avons décidé de récupérer, grâce à la fonctionnalité de récupération des conditions finales¹, les paramètres finaux de la trajectoire. Après cela, nous les avons appliqués en conditions initiales comme base d'une toute nouvelle trajectoire, et voici ce que nous avons pu obtenir pour des précisions temporelles variées :

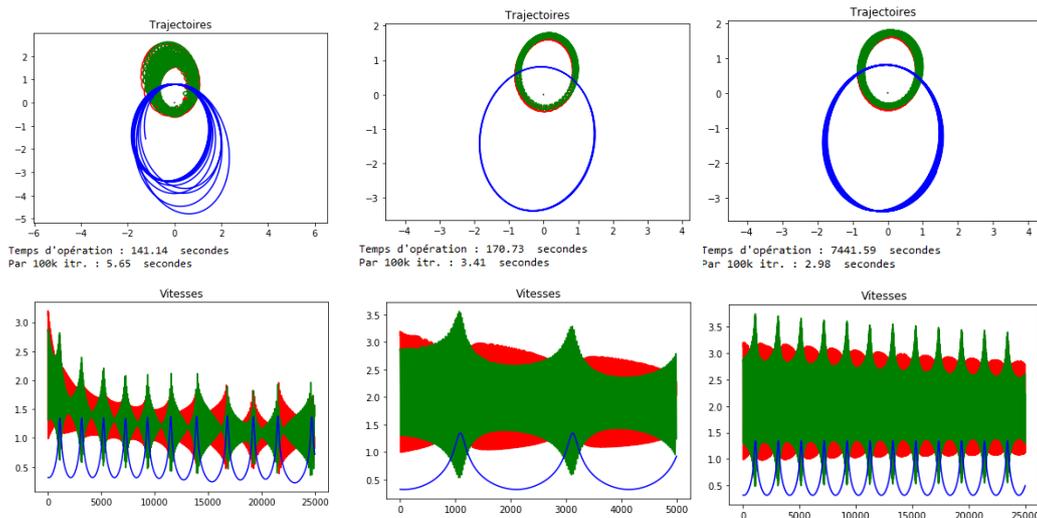


Figure 59 – Solutions pseudo-binaires, précisions respectivement de 10^{-4} , 10^{-5} et 10^{-6} , $t_{max} = 250, 50$ et 250

¹ Voir [Reprise des conditions finales afin de prolonger les courbes](#)

En faisant tendre la précision vers 0 (et donc le temps d'opération vers l'infini !), nous avons pu conclure qu'il est probable que cette solution, trouvée de la manière la plus fortuite qu'il soit, soit effectivement stable.

Solutions de type « chute libre »

Les solutions de type « chute libre » sont des solutions particulièrement complexes puisqu'elles ne présentent absolument aucune symétrie dans leur expression géométrique. Nous n'avons pas réussi à les reproduire exactement car elles demandent une précision bien plus pointue que ce que notre programme peut simuler (à titre de comparaison, les solutions théoriques ont été trouvées par le superordinateur national de Chine, pourvu d'une architecture de près de 1200 processeurs interdépendants, qui a donc pu simuler avec une précision temporelle de l'ordre de 10^{-300} , tandis que nous peinons à simuler en deçà de 10^{-8} sans dépasser l'heure d'opération...)

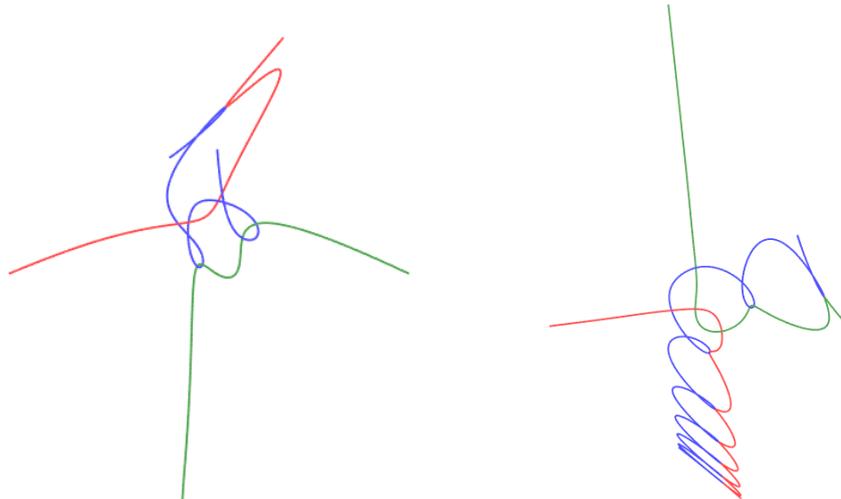


Figure 60 – Deux exemples théoriques de « Chute libre »

Nous avons tenté de reproduire le cas asymétrique suivant :

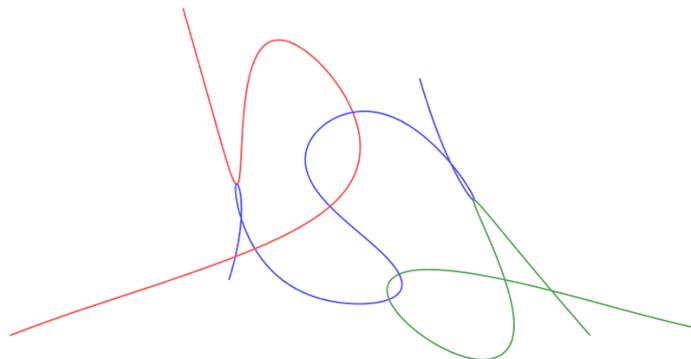
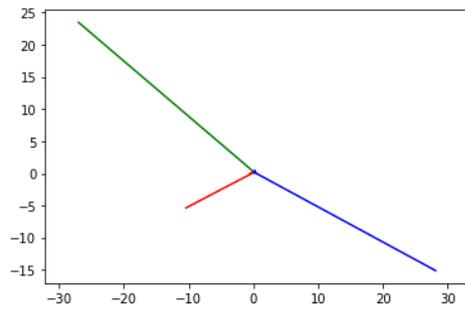


Figure 61 – Autre exemple théorique de « Chute libre »

Et voici ce que nous avons obtenu, avec divers ordres de grandeur :

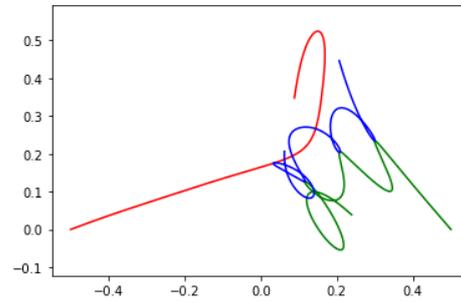
Nombre d'itérations par frame : 1000 , à 10000 frames/ut
 Nombre de frames : 10000
 Nombre d'itérations : 10.0 million
 Temps d'opération estimé : 320.0 secondes



Temps d'opération : 340.16 secondes
 Par 100k itr. : 3.4 secondes

Figure 62 – Simulation à une précision de 10^{-7}

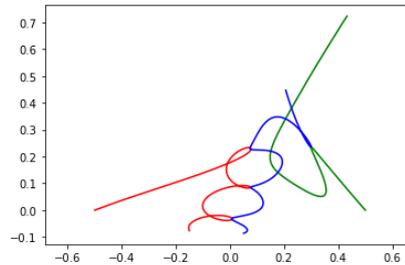
Nombre d'itérations par frame : 1000 , à 100000 frames/ut
 Nombre de frames : 100000
 Nombre d'itérations : 100.0 million
 Temps d'opération estimé : 3200.0 secondes



Temps d'opération : 3052.5 secondes
 Par 100k itr. : 3.05 secondes

Figure 63 – Simulation à une précision de 10^{-8}

Nombre d'itérations par frame : 20000 , à 10000 frames/ut
 Nombre de frames : 10000
 Nombre d'itérations : 200.0 million
 Temps d'opération estimé : 6400.0 secondes



Temps d'opération : 6293.59 secondes
 Par 100k itr. : 3.15 secondes

Figure 64 – Simulation à une précision de $5 \cdot 10^{-9}$

Nous devons donc nous contenter de simulations réalisées par le superordinateur de Chine pour nos observations, nos propres simulations se révélant inefficaces.

Les solutions de « chute libre » sont donc particulièrement intéressantes à observer en mouvement¹ car elles montrent que les systèmes sont au bord de l'éjection, chaque système atteignant une vitesse particulièrement élevée sur une trajectoire pseudo-linéaire, qu'on pourrait croire que le système va être projeté. Et pourtant il n'en est rien, le système finit par revenir sur sa trajectoire et être projeté dans une autre direction, le tout de manière périodique. Ceci, couplé à la nécessité d'avoir une précision élevée, semble indiquer que ce cas de figure est fortement corrélé à la théorie du chaos².

¹ Voir [Observable : Planar Three-Body Problem Orbits](#)

² Voir [Le chaos dans le problème à trois corps](#)

Notion de hiérarchie

Jusqu'ici, on a pu observer dans les ensembles de trajectoires non chorégraphiques pouvaient être ramenés à des problèmes à deux corps, sur le plan physique. Il semble donc qu'il existe une forme de hiérarchie dans les ensembles du système, comme on peut le remarquer avec la solution de Broucke A2 :

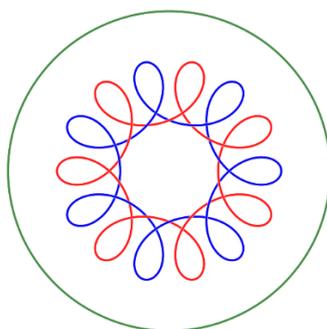


Figure 65 – Solution de Broucke A2

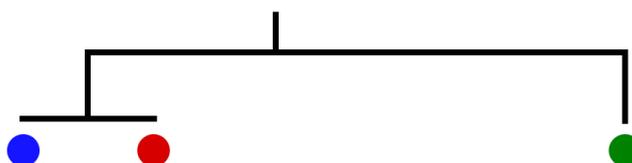


Figure 66 – Hiérarchie de la solution de Broucke A2

Un autre système mettant très bien en relief ce principe de hiérarchie est la solution que nous avons pu trouver par nous même dans la partie [Solutions de type « Tendance binaire »](#). La tendance binaire relève bien le fait que deux masses entrent en relation tellement intime qu'on peut légitimement les considérer comme un corps unique centré sur leur barycentre de rotation.

A l'inverse, les ensembles chorégraphiques sont des ensembles que l'on ne peut pas diviser en plusieurs problèmes isolés, car chaque action de chaque planète agit autant sur une seconde que sur la troisième planète du système. Similairement, les solutions chaotiques sont rarement simplifiables de manière hiérarchique, sachant qu'elles ne disposent même pas de symétrie dans leurs trajectoires¹.

Nous avons vu, durant toute cette partie de l'étude des solutions au problème à trois corps comment pouvaient mécaniquement se construire et se comporter au gré des perturbations les trajectoires solutions. Nous allons donc, dans la prochaine partie, les étudier sous un angle de vue plus axé sur la physique.

¹ Voir [Solutions de type « chute libre »](#)

Approche physique du problème à Trois corps

Les niveaux de stabilité

Il est possible de classer les trajectoires selon l'issue qu'elles réservent aux corps qu'elles concernent lorsque le temps tend vers l'infini.

➤ *Trajectoire stable*

Une telle trajectoire est typiquement similaire à celles que nous avons pu observer dans la partie de l'étude des solutions. Elles sont insensibles aux temps : au bout d'une période, chaque corps est exactement à la même place qu'il avait une période auparavant (c'est le principe même de l'évolution périodique d'une grandeur).

➤ *Trajectoire pseudo-stable*

Ces trajectoires sont des solutions stables très légèrement altérées : une perturbation les rend légèrement instable, suffisamment pour qu'elles se mettent en rotation autour du barycentre. Nous avons déjà pu observer ce type de trajectoire dans l'étude de la solution de Cris Moore¹.

On ne peut que supposer que cette solution soit stable, il faudrait prouver qu'il existe une certaine super-période Y après laquelle on retrouverait effectivement une situation périodique.

➤ *Trajectoire chaotique dégénérée*

Cette trajectoire solution correspond tout simplement à l'expulsion d'un corps vers l'infinité de l'espace. Il s'agit d'une conséquence chaotique d'un changement infime dans les conditions initiales d'une solution y étant particulièrement sensible (typiquement les solutions « chute libre »). Il y a ici matière de principe physique du chaos mais aussi de précision des approches numériques. L'erreur augmentant particulièrement lorsque les planètes se rapprochent (et donc que les vitesses tendent vers l'infini → que la projection est proche), on n'est jamais réellement sûr lors de l'étude de la dégénération d'une trajectoire normalement stable que cette éjection est réelle².

¹ Voir [Solution de Cris Moore](#)

² Voir [Précision](#)

➤ *Trajectoire chaotique stable*

La trajectoire chaotique est une trajectoire hypothétique, qui ne serait ni périodique, ni pseudo-périodique, ni même dégénérée. Existerait-il une solution stable indescriptible ? Le vrai problème est en réalité sur le fait qu'il ne nous sera jamais possible de prouver, même numériquement, l'existence d'une telle solution. La périodicité d'un événement est pour le moment le moyen de prouver que ce dernier est stable pour tout t , par extrapolation. Dans l'étude de ce type de trajectoires, il faudrait calculer la trajectoire de chaque planète avec une précision incommensurable, et ce sur un temps exactement égal à l'infini, ce qui est purement et fondamentalement impossible. On a beau avoir pu observer Broucke A10 rester particulièrement stable malgré les perturbations et l'imprécision sur un grand intervalle de temps, on ne pourra jamais réellement dire qu'elle est « chaotiquement stable ».

D'un point de vue plus concret, il semblerait que la tendance qu'a le système à trois corps à dégénérer/à se convertir en système pseudo-binaire met en relief le fait que ces situations soient des « puits énergétique » vers lesquels la dynamique tendrait. Les solutions stables seraient-elles alors des cas extrêmement uniques, comme une balle pouvant tenir sur la pointe d'une aiguille ? Pas vraiment, comme nous avons pu observer l'étonnante stabilité de Broucke A10... Mais existe-t-il une « logique » ou un « principe » permettant d'expliquer ces phénomènes si différents ?

Le chaos dans le problème à trois corps

Avant de mentionner la théorie du chaos, il convient de préciser ce qui caractérise les objets exposés au chaos.

En sciences, il est possible d'étudier l'évolution de ce que l'on appelle des systèmes dynamiques. Un système dynamique est tout simplement un objet ou un ensemble d'objets dont les propriétés varient en fonction de divers paramètres au cours du temps. Ces systèmes dynamiques respectent deux lois fondamentales dans leur évolution : la causalité, et le déterminisme. En résumé, ces deux conditions traduisent le fait qu'un système dynamique est dépendant d'événements passés ou présents, et que *le futur qui en résulte est unique*. On peut donc, en théorie, prévoir l'évolution des systèmes dynamiques à partir de modèles physiques et/ou mathématiques. Ainsi, le mouvement de corps célestes est un sujet d'étude de systèmes dynamiques.

Dans de nombreux cas courants, la causalité prévoit des cas assez linéaires, un changement dans l'état initial du système ne cause qu'une légère perturbation dans l'évolution et l'état futur. Cela semble être le cas du problème à deux corps¹, d'après nos observations.

Mais le problème des trois corps est bien plus instable que le problème à deux corps, comme on a déjà pu l'observer jusqu'ici. En dehors de quelques trajectoires stables établies, on constate la plupart du temps des trajectoires totalement chaotiques, suivies généralement d'une projection. Le plus important réside dans l'état initial de notre système, qui influence de manière significative l'évolution des trois corps. Un changement de position de l'ordre de 10^{-2} unités au sein du repère suffit déjà à perturber l'équilibre dans certains cas, comme nous l'avons vu avec la solution de Moore². De même, la précision des calculs est également à prendre en compte, avec pour exemple les trajectoires de chute libre³.

Ce genre d'évolutions, a priori imprévisibles et fortement dépendantes des conditions initiales, est un exemple de chaos. Notre système dynamique formé par les trois corps est toujours soumis à la causalité et au déterminisme, mais ceux-ci ne semblent plus du tout linéaires. Les trajectoires obéissent très certainement à un modèle mathématique exact, mais il nous est impossible de l'explicitier, de près ou de loin.

Néanmoins, on peut observer des mouvements périodiques ou pseudopériodiques au sein de systèmes qui semblent à première vue totalement chaotiques, comme évoqué dans la partie précédente.

¹ Voir [La solution générale du problème à deux corps](#)

² Voir [Solution de Cris Moore](#)

³ Voir [Solutions de type « chute libre »](#)

Ouverture

Existence des systèmes trinaires

Nous avons étudié une infime partie des solutions hypothétiques du problème à trois corps. Mais qu'en est-il de l'existence de solutions réelles ?

Dans l'espace où relatent des étoiles et des planètes, on peut considérer une approximation qui est vraie dans une écrasante majorité des cas : la masse de la planète est négligeable devant la masse de son étoile. Ainsi, l'étude des orbites des planètes autour de tels systèmes est du domaine du problème à trois corps, mais les interactions peuvent se simplifier en un problème à deux corps ne concernant que les étoiles. Voici alors les différents types de trajectoires que peut avoir une planète autour d'un système binaire d'étoiles :

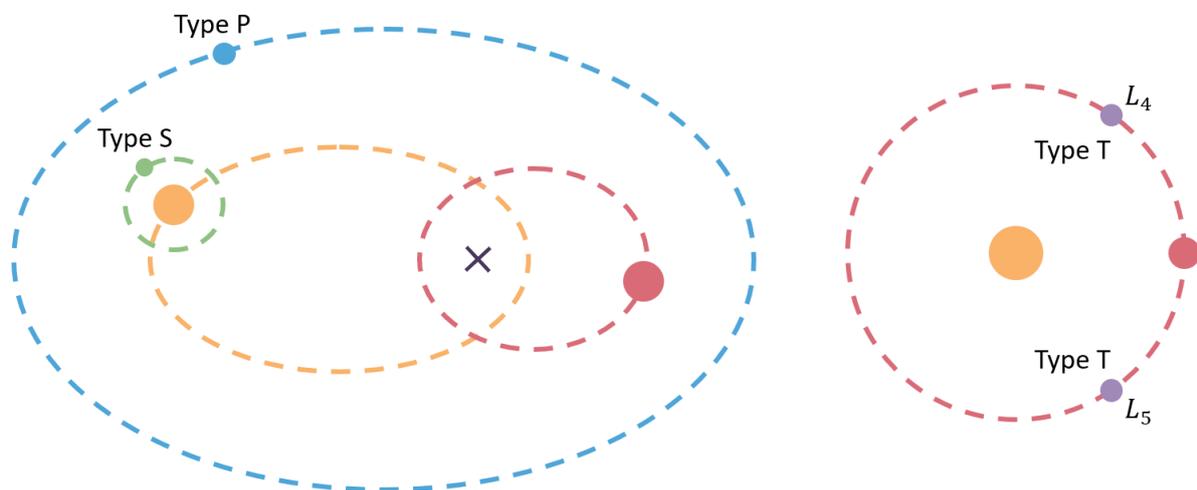


Figure 67 – Les 3 différentes orbites d'une planète autour d'un système stellaire binaire

On remarque que les orbites de type T se rapportent à la stabilité de la planète focalisée sur le point 4 ou 5 des points de Lagrange. Nous n'irons que rapidement sur ce type de trajectoire car la description des points de Lagrange s'agit d'un domaine entier dans l'étude de la mécanique céleste.

Nous allons dans cette partie étudier différents systèmes réels.

➤ *Kepler-1647*

Kepler-1647 est un système stellaire binaire situé à 3700 AL abritant l'exoplanète Kepler-1647b . Cette dernière dispose de la plus grande orbite de type-P autour d'un système stellaire binaire que l'on ait découvert.

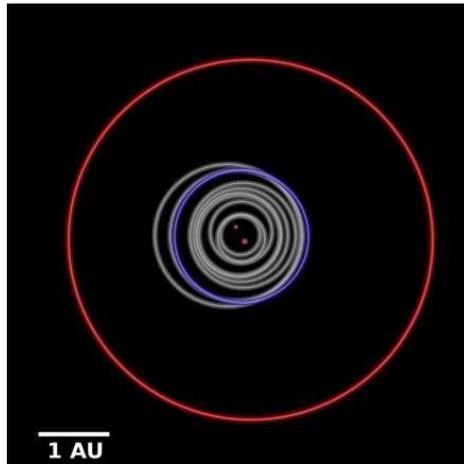


Figure 68 – Comparaisons avec le système Kepler-1647

Dans l'image précédente figure une comparaison entre différentes orbites qu'a pu trouver le télescope spatial Kepler dans des systèmes stellaires simples (en gris), l'orbite de la Terre (en bleu) et l'orbite de Kepler-1647b (en rouge). On remarque immédiatement que la zone habitable d'un tel système est bien plus étendue que celle d'un système à étoile unique.

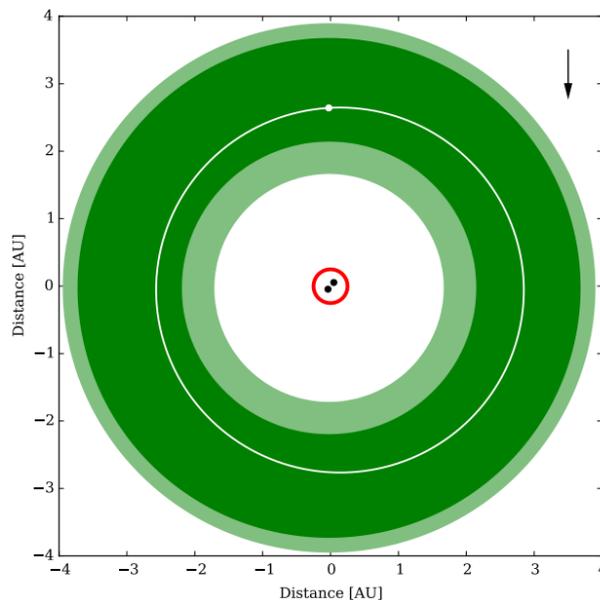


Figure 69 – Zone habitable du système Kepler-1647 – *The Astrophysical Journal*

En effet, sur ce figuré est montrée la zone habitable du système Kepler-1647, qui est alors un disque principalement centré sur un cercle de rayon approximativement égal à 2.7 UA (Unités Astronomiques). Les zones en vert clair sont les zones où l'énergie transmise n'est juste que par intermittence (c'est une conséquence de la rotation du système stellaire central). Cette zone particulière est ici relativement réduite car les étoiles du système binaire sont en orbite très rapprochée. Pour comparaison, le système solaire dispose d'une zone habitable dont le rayon s'étend seulement de 0,95 à 2,4 UA.

➤ *Le système PSR-B1620-26*

Ce système est actuellement composé d'un système binaire-milliseconde pulsar-naine blanche autour duquel gravite la planète PSR B1620-26 b. Cependant, cette situation est particulièrement inédite, des théories ont alors tenté de comprendre comment a pu s'établir une telle relation. La plus plausible insinue que le système se présentait initialement sous la forme d'un système étoile-planète simple (l'étoile étant une géante rouge), avant d'être perturbé par un système binaire composé d'une étoile à neutrons et de son étoile compagnon (donc un système double). Ce système double est alors dispersé et l'étoile à neutron capture l'étoile attractrice du système planétaire, avant de commencer à la consommer (l'étoile à neutron devient alors un pulsar). La géante rouge devient alors une naine blanche (une étoile effondrée uniquement composée d'hélium), qui forme alors avec le pulsar le système binaire au centre attracteur du nouveau système planétaire, comportant toujours la planète PSR B1620-26 b. Le système attracteur, de par les interactions qu'il a subit, est en rotation particulièrement rapide, la période de révolution étant de l'ordre de 10 ms.

➤ *Le système Proxima Centauri*

Le système de Proxima du Centaure est le système stellaire le plus proche de notre système (4 AL seulement)

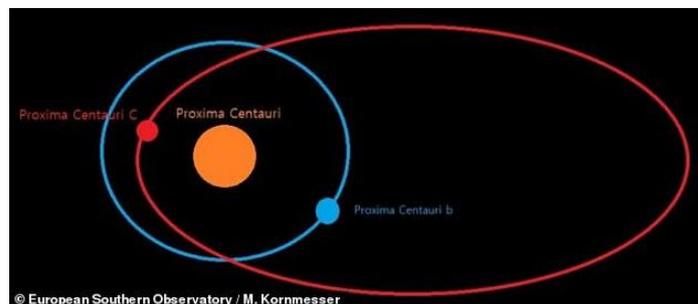


Figure 70 – Anatomie du système stellaire de Proxima Centauri – *European Southern Observatory*

Les corps Alpha Centauri Ba, Bb et Bc étant des planètes, le système d'Alpha Centauri est un système pouvant se ramener à deux systèmes binaires dont l'attracteur n'est pas extrêmement influencé par son étoile orbitante.

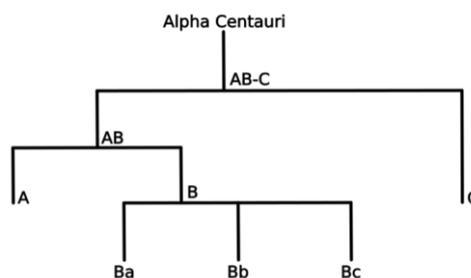


Figure 71 – Hiérarchie du système de Proxima-Centaure – *David Dellier*

➤ *Le système HD-188753*

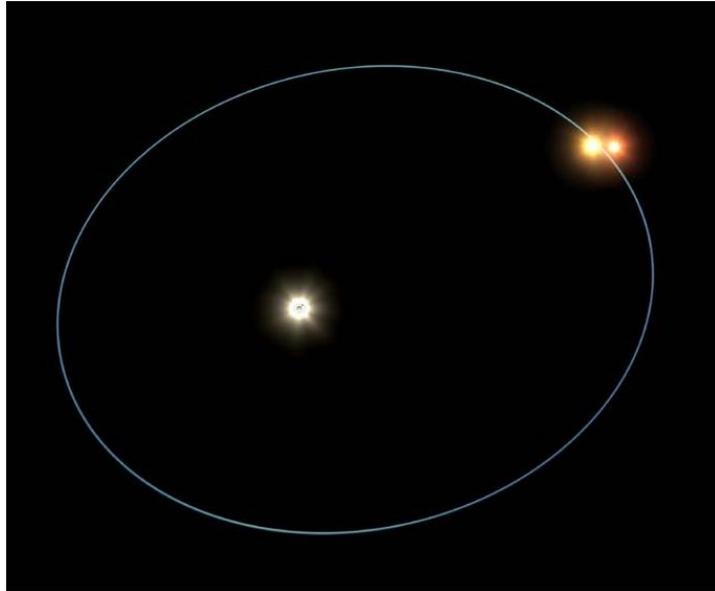


Figure 72 – Le système trinaire HD-188753, système stellaire purement hiérarchique

Il se trouve même que HD-188753Ab, exoplanète géante gazeuse chaude, étant par ailleurs la première exoplanète appartenant à un système trinaire découverte, orbite dans une zone « sandwich » entre l'étoile principale (ou étoile de classe hiérarchique A, au centre du figuré) et le système binaire que forment HD-188753B et HD-188753C. Cette découverte a remis en cause des théories sur le modèle de formation de telles géantes gazeuses.

➤ *Trajectoires en pied de cheval*

Les trajectoires en pied de cheval relatent des points de Lagrange. Elles concernent les corps dont la masse est négligeable devant la masse des deux corps se gravitant autour. 2010-SO₁₆, un astéroïde sub-kilométrique, partage l'orbite Soleil-Terre en oscillant entre les points de Lagrange L4 et L5, dans une période de 175 ans, selon le schéma suivant :

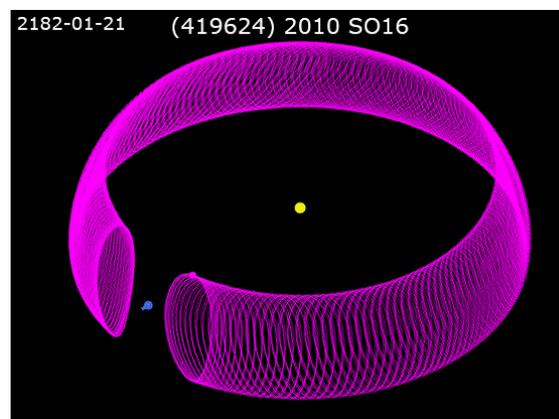


Figure 73 – Trajectoire de 2010-SO16 – *HORIZONS System*

Nous avons donc mis en couleur le fait que le problème à trois corps est un fait dans l'espace réel, mais seulement à une échelle où un des corps a une influence négligeable sur les autres. Qu'en est-il des systèmes où beaucoup plus de corps s'influencent mutuellement avec une intensité comparable ?

Le problème à N-corps

La mécanique céleste est un domaine scientifique dont le sujet principal est de déterminer la dynamique d'un ensemble de N corps

➤ *Modélisation mathématique*

On peut modéliser le bilan des interactions que subit un corps j isolé dans le système à N corps avec la relation suivante, basée sur le P.F.D.¹ :

$$-G \sum_{k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j\}} \frac{m_j m_k (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3} = m_j \ddot{\vec{r}}_j$$

Il faut préciser que le terme évoluant selon l'inverse de la distance au cube est dû à la normalisation des vecteurs position différentiel $\vec{r}_j - \vec{r}_k$. Cette formule relate bien de la complexité exponentielle du système à mesure que N augmente. Pour cette ouverture, nous n'allons pas nous intéresser à résoudre analytiquement ce problème pour un N déterminé, mais nous pouvons tout de même passer rapidement sur une analyse physique de quelques trajectoires solutions que nous avons pu rencontrer.

➤ *Étude de trajectoires solution chorégraphiques*

Pour rappel, les solutions chorégraphiques sont des trajectoires solutions où les planètes empruntent toutes la même trajectoire.



Figure 74 - Une solution du problème à 4 corps, « super-eight figure »

On remarque la grande proximité qu'a cette trajectoire solution avec celle de Cris Moore que nous avons pu étudier². La symétrie géométrique que présente cette solution rend presque son existence évidente.

¹ Le Principe Fondamental de la Dynamique, voir [Modélisation physique des interactions](#)

² Voir [Solution de Cris Moore](#)

La symétrie dans les solutions du problème à N -corps semble avoir été la façon la plus efficace pour les scientifiques de trouver des solutions. On peut cependant noter des trouvailles sortant du lot, comme cette solution du problème à 6 corps :

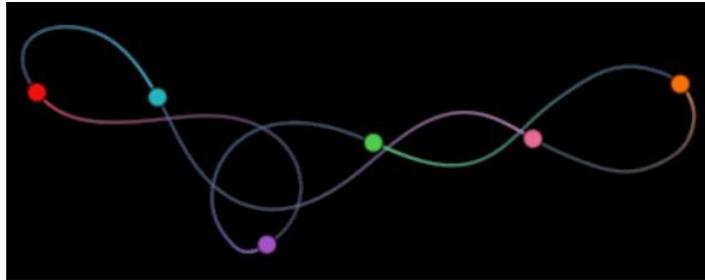


Figure 75 - Une solution du problème à 6 corps asymétrique

Cette solution semble assez irréaliste, cependant, en la regardant sur plusieurs points de vue locaux, on remarque qu'il s'agit de deux solutions de problèmes inférieurs imbriquées, à savoir la solution « eight figure » du problème à trois corps (à gauche) et la solution « super-eight figure » du problème à quatre corps (à droite). On remarque également que la zone d'intersection entre ces deux parties de trajectoire et ressemble à une solution conique hyperbolique¹ du problème à trois corps.

Lorsqu'on étudie des systèmes plus conséquents, on peut observer des relations hiérarchiques² beaucoup plus prononcées :

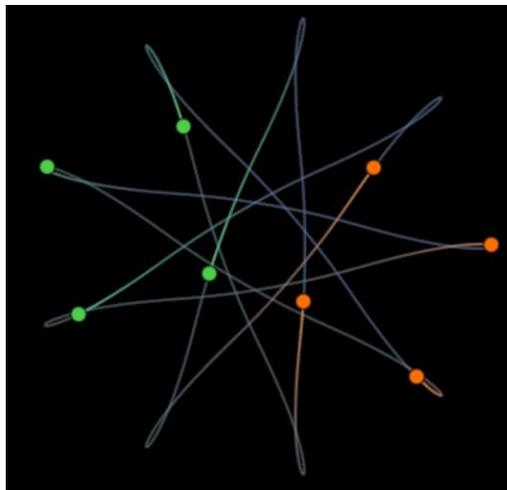


Figure 76 – Une solution du problème à huit corps « double carrés »

On remarque ici que la solution peut être facilement assimilée à deux problèmes à 4 corps, chacun de ces problèmes à 4 corps ayant pour résolution la trajectoire circulaire triviale, comme le montre le schéma ci-dessous.

¹ Voir [Généralisation des solutions](#)

² Voir [Notion de hiérarchie](#)

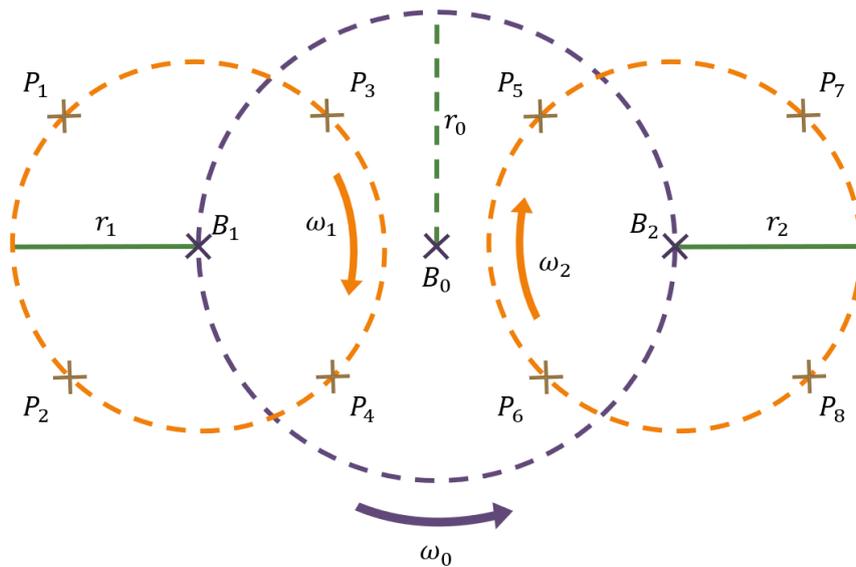


Figure 77 – Schéma de fonctionnement de la solution du problème à 8 corps « deux carrés »

Les pulsations de rotation ω_1 et ω_2 sont exactement identiques et sont proportionnelles aux sommes des masses des planètes les concernant (pour ω_1 : P_1, P_2, P_3, P_4 , pour ω_2 : P_5, P_6, P_7, P_8) et aux rayons r_1 et r_2 (alors égaux pour toutes masses égales). La pulsation ω_0 concerne alors le problème à deux corps des deux barycentres B_1 et B_2 gravitant autour de B_0 , et est proportionnelle à la somme des masses des barycentres, donc à la somme de toutes les masses planétaires, et au rayon fictif cercle r_0 . On pourrait alors déterminer ces pulsations grâce à la troisième loi de Kepler, s'exprimant alors comme :

$$\omega = \sqrt{\frac{r^3}{G \sum_k m_k}}$$

A l'inverse, on peut avoir décomposer le même problème à huit corps en quatre problèmes à deux corps, comme pour la solution suivante :

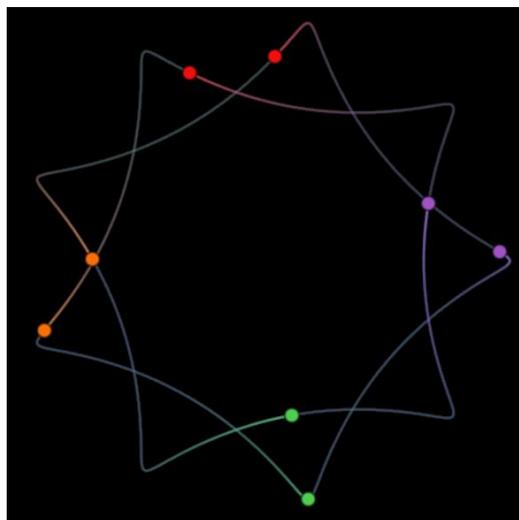


Figure 78 - Une solution du problème à huit corps décomposée en 4 problèmes à deux corps

Pour cette solution, on peut résumer les interactions en une hiérarchie à deux étages, construite comme le montre le schéma suivant :

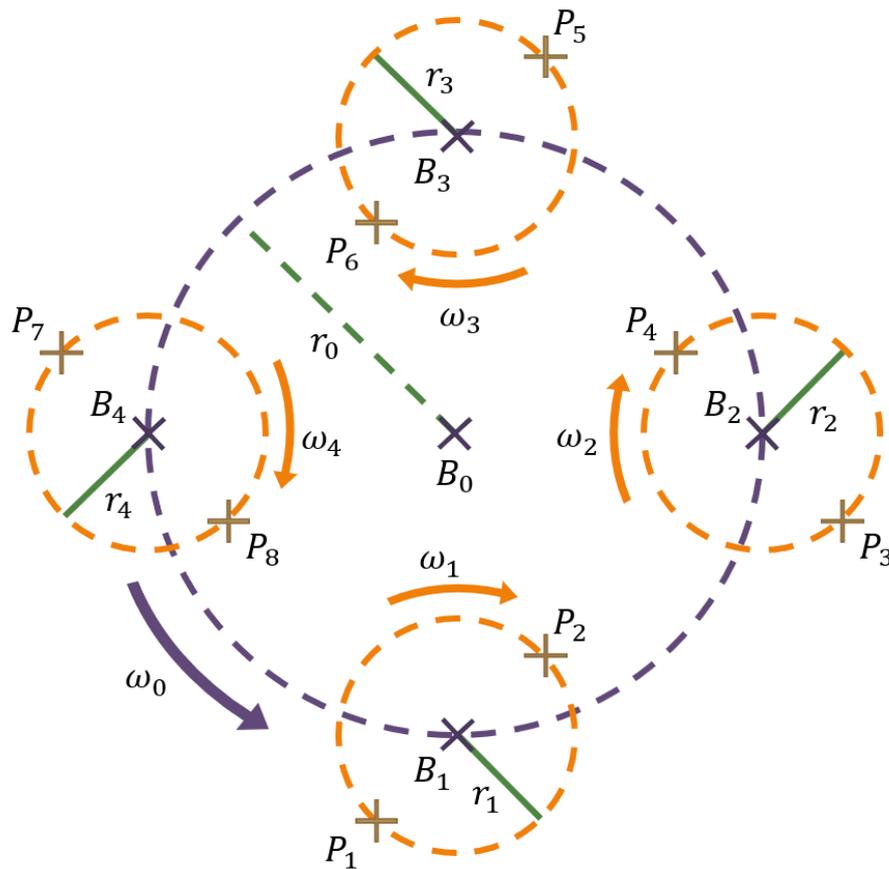


Figure 79 – Schéma de la solution à huit corps assimilée à quatre problèmes à deux corps

Il est donc facilement possible, lorsque les trajectoires se décomposent en une somme de plusieurs problèmes réduits à moins de corps interagissant ensemble, et surtout grâce au principe du barycentre, de connaître les caractéristiques du mouvement solution.

Conclusion

Des systèmes gravitationnels à trois corps

Notre étude préliminaire du problème à deux corps a révélé le déterminisme linéaire auquel il est profondément ancré. A travers l'étude mathématique de ses trajectoires solutions, nous avons pu démontrer la stabilité particulière qu'il reflète.

C'est donc grâce à cela, et à nos simulations sur le problème à trois corps, que nous avons pu constater à de multiples reprises que celui-ci se différencie singulièrement du classique problème à deux corps du fait de son comportement chaotique.

Nous avons bel et bien attesté de l'existence théorique de tels systèmes, ce qui était l'un de nos objectifs. Nous avons également pu en étudier les sensibilités aux conditions initiales, caractéristique représentative de la présence du chaos dans les trajectoires solutions. Celles-ci se sont par ailleurs révélées très diversifiées, autant par leur stabilité relative que par leur comportement au cours du temps.

Enfin, l'approche physique et réelle que nous avons pu obtenir de l'étude nous aura permis de comprendre et catégoriser cette diversité.

C'est en ouvrant ce rapport au problème à N -corps que nous avons réalisé qu'étudier le problème à trois corps, c'est se projeter dans l'entièreté de la mécanique céleste.

De l'AC20

Lorsque nous avons dû choisir notre sujet d'AC20, nous nous étions immédiatement tournés vers un problème de la mécanique céleste, car c'était un sujet qui nous intéressait fortement. Ayant quelques bases sur la mécanique céleste, nous souhaitions d'une part choisir un sujet qui nous paraissait peu commun et d'autre part aborder des concepts d'une physique avancée.

Le choix de l'étude du problème à trois corps est ainsi apparu comme une évidence pour nous, c'était un sujet dont nous n'avions jamais entendu parler et qui proposait un défi bien plus coriace que le plus courant problème à deux corps. Nous voulions également couvrir un large champ de recherche autour des trois corps (généralisation à N corps, étude de l'approche réelle, etc). Le but n'était pas d'apporter de nouvelles réponses au problème, mais simplement de le découvrir, de l'appréhender et de l'expliquer sous un angle qui nous correspond.

Ainsi, nous n'attendions ni plus ni moins que d'acquérir des connaissances, ce qui est exactement le but de l'UV. Et à l'issue de ce projet de recherche, nous pensons qu'il est justifié d'affirmer que cet objectif a largement été atteint. Davantage que l'acquisition de ces connaissances sur le problème à trois corps et tout ce qui l'entoure, nous avons compris ces connaissances et les avons intégrées. Par l'étude de chaque point que ce rapport mentionne, nous avons appris à connaître les notions auxquelles ils se rapportent et dans quelles mesures ils s'inscrivent dans leurs domaines respectifs.

Nous savions que ce ne serait pas une chose aisée de traiter ce problème en partant de notre socle de connaissances. Il nous fallait nous préparer à côtoyer des domaines bien au-delà de notre zone de confort avant même de pouvoir travailler sur le problème lui-même. C'est donc avec une grande satisfaction que nous constatons que nous avons réussi à découvrir et à utiliser de nouveaux outils, aussi bien mathématiques que physiques, afin de parvenir au terme de notre étude.

Chaque point de cette étude a été riche en surprises pour nous, amenant des observations et des théories fascinantes sur la mécanique céleste. Cela nous a permis de généraliser des idées que nous pensions jusque-là être restreintes à une portée limitée, comme par exemple le fait que, dans une certaine mesure, une majorité de problèmes à N corps tendent à être simplifiés vers plusieurs problèmes à un, deux ou trois corps. La question principale qui nous venait à l'esprit, au début de nos recherches, était « Est-ce que ça existe vraiment ? Est-ce que c'est physiquement possible d'observer des cas stables avec au moins 3 astres ? », on y songeait un peu comme à un mythe, en quelque sorte.

Ainsi, à mesure que nous progressions dans notre raisonnement, la découverte de dizaines de cas stables différents a été une excellente surprise.

Finalement, la tournure que nous avons prise pour l'ouverture nous a guidés vers une généralisation de notre étude qui nous pousse à vouloir en apprendre encore plus sur la mécanique céleste.

C'est donc avec une grande fierté que nous concluons par ces mots notre projet d'AC20, qui fut une excellente expérience en tous points, et qui, nous l'espérons, vous aura transmis notre engouement pour la science.

Références

Sitographie

Connaissances

- [TangenteX](#)
- [Wikipedia](#)
- [Futura Sciences](#)
- [Observable : Planar Three-Body Problem Orbits](#)
- [Femto-physique : Runge-Kutta](#)
- [Youtube : ScienceClic](#)
- [Youtube : Chaos](#)
- [Université de Vienne : Dynamique des systèmes co-orbitaux](#)
- [RectangleWorld : N-Body choreographies](#)

Outils

- [Matplotlib.org](#)
- [Python.org](#)
- [Spyder-IDE.org](#)
- [Observable](#)

Résumé

Dans le cadre de l'UV AC20 : Acquisition de Connaissances, proposée par l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, nous avons entrepris l'étude des trajectoires des systèmes dynamiques à trois corps dans l'espace. Notre objectif, à travers ce projet de recherches, est de comprendre dans quelles conditions ces systèmes peuvent exister et comment ils évoluent au cours du temps, à partir des travaux de scientifiques ayant exploré cette branche de la mécanique céleste d'une part, et à partir d'expérimentations et d'observations d'autre part.

A l'aide d'outils mathématiques, physiques, et informatiques, nous avons ainsi tenté de reproduire et d'analyser des solutions du problème à trois corps.

Nous avons également observé, dans une moindre mesure, des notions liées au problème à trois corps, comme par exemple les instabilités relatives à la théorie du chaos ou encore la généralisation au problème à N corps.