

# Courbes paramétrées, de Bézier et à hodographe pythagoricien

Aubert HERVÉ

Université de Technologie de Belfort-Montbéliard - AC20

Professeur encadrant : M. Frédéric HOLWECK

19 juin 2020

# Table des matières

- 1 Courbes paramétrées** **5**
- 1.1 Définition . . . . . 5
- 1.2 Exemples . . . . . 5
- 1.3 Paramétrisation par longueur d’arc . . . . . 6
  - 1.3.1 Changement de paramètre admissible . . . . . 6
  - 1.3.2 Longueur d’une courbe . . . . . 7
  - 1.3.3 Paramétrisation par longueur d’arc . . . . . 8
- 1.4 Repère mobile, courbure et torsion d’une courbe . . . . . 10
  - 1.4.1 Courbe paramétrée par longueur d’arc . . . . . 10
  - 1.4.2 Courbe à paramétrisation quelconque . . . . . 13
  
- 2 Courbes de Bézier** **16**
- 2.1 Historique . . . . . 16
- 2.2 Construction par l’algorithme de De Casteljaou . . . . . 16
  - 2.2.1 Rappels sur les barycentres . . . . . 16
  - 2.2.2 Procédé de construction . . . . . 17
- 2.3 Construction par les polynômes de Bernstein . . . . . 19
  - 2.3.1 Définition . . . . . 19
  - 2.3.2 Propriétés . . . . . 20
- 2.4 Utilisation des courbes de Bézier . . . . . 22
  - 2.4.1 Propriétés mathématiques . . . . . 22
  - 2.4.2 Usages concrets . . . . . 23
  
- 3 Courbes à hodographe pythagoricien** **26**
- 3.1 Les triplets pythagoriciens . . . . . 26
- 3.2 Propriétés des courbes PH . . . . . 28
  - 3.2.1 Définition . . . . . 28
  - 3.2.2 Degré et conditions de régularité des courbes PH . . . . . 29
- 3.3 Courbes cubiques . . . . . 30
  - 3.3.1 Caractérisation des points de contrôle d’une courbe PH cubique . . . . . 30
  - 3.3.2 Caractérisation par le polygone de contrôle d’une courbe PH cubique . . . . . 32

3.4	Courbes PH de plus haut degré . . . . .	38
3.4.1	Courbes quartiques . . . . .	38
3.4.2	Courbes quintiques . . . . .	41
3.5	Introduction à la représentation complexe . . . . .	42
3.5.1	Bijection entre les courbes polynômiales et les courbes PH . . . . .	42
3.5.2	Simplification : exemple des courbes cubiques . . . . .	43

## Remerciements

Je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à Frédéric Holweck, enseignant chercheur en mathématiques à l'UTBM, de m'avoir proposé ce sujet passionnant et d'avoir investi beaucoup de son temps dans l'accompagnement de mes recherches. Son enthousiasme et la communicativité de sa passion pour les sujets qu'il étudie m'ont réellement motivé à moi même m'investir dans ce projet d'étude.

Je souhaite également remercier ma famille, d'avoir pris le temps de relire ce rapport et d'apporter leurs avis.

Je souhaite enfin remercier l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard de fournir une cadre propice à ce genre de projet, à travers un suivi régulier de l'avancement, de la mise à disposition de ressources bibliographiques etc...

## Introduction et motivation

*"As long as algebra and geometry were separated, their progress was slow and their uses limited; but once these sciences were united, they lent each other mutual support and advanced rapidly together towards perfection."* , Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

C'est ici l'une des facettes de ce sujet qui m'a poussé à l'étudier : l'association des grands domaines des mathématiques (géométrie, analyse réelle et complexe, algèbre) au cœur d'une seule notion : les courbes paramétrées. Ces dernières m'ont invité à m'aventurer dans des domaines qui m'étaient jusqu'alors inconnus comme la géométrie différentielle, les quaternions, l'interpolation. Je trouve également une certaine beauté dans l'objet mathématique qu'est une courbe, une certaine fascination. En effet qu'est-ce qu'une courbe ? Un ensemble de points, mais ces derniers ne sont que pure représentation de l'esprit, sans consistance réelle. C'est cette dualité entre l'essence théorique et la facilité à concevoir un objet géométrique qui donne sa singularité à la géométrie. Se plonger la tête dans le monde géométrique, ce monde de la perfection, se deleter d'objets et de concepts intangibles est vraiment un sentiment particulier, que toutes les personnes qui, comme moi, ont un attrait tout particulier pour les mathématiques, ont -je l'imagine- déjà ressenti.

On commencera ce rapport par aborder la notion de courbe paramétrée, pour bien établir une base pour ce qui suivra. Nous continuerons avec l'étude des courbes de Bézier, une classe de courbe polynômiales présentant d'intéressantes propriétés et applications. Nous finirons par traiter des courbes à hodographe pythagoricien, que nous appellerons courbes PH. Nous traiterons quelques propriétés simples de ces courbes à l'issue de ce rapport, mais notons que nous n'aborderons qu'une infime partie de ce que ce sujet a à offrir. On pourra se référer à [2] pour approfondir la lecture, de nombreux éléments de ce document en sont inspirés.

On partira du principe dans la suite de ce document que le lecteur est familier avec la plupart des outils classiques d'analyse mathématique, d'algèbre, et de géométrie.

# Chapitre 1

## Courbes paramétrées

### 1.1 Définition

Soit  $n$  un entier (généralement  $n = 2$  ou  $n = 3$ ),  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On appelle courbe (ou arc) paramétrée la fonction vectorielle  $\gamma$  de  $t$  définie par :

$$\gamma : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

On appelle le support de la courbe paramétrée  $(\gamma, I)$  l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  de coordonnées  $\gamma(\mathbf{t})$  avec  $t \in I$ , on a alors  $\Gamma = \gamma(I)$ . Dans le cas où  $n = 2$ , on parle de courbe plane ; pour  $n = 3$  nous parlerons de courbe de l'espace ou courbe gauche.

On explicitera dans la partie suivante le fait qu'une courbe paramétrée n'admet jamais qu'une seule paramétrisation, qu'il existe donc toujours plusieurs expressions décrivant un support semblable.

Il est facile de faire la confusion entre courbe paramétrée et fonction d'une variable. En effet, nous sommes habitués à manipuler ces dernières et à les visualiser à travers des graphes. L'une des propriétés intrinsèques des fonctions d'une variable est qu'un antécédant ne peut avoir qu'une seule et unique image : le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ne coupe la droite d'équation  $x = a, a \in \mathbb{R}$  qu'une seule et unique fois. Ce n'est pas le cas pour les courbes paramétrées, pour lesquelles il est tout à fait possible qu'une image ait plusieurs antécédants. Ainsi, les fonctions d'une variables sont un cas particulier de courbes paramétrées, alors que les courbes paramétrées offrent bien plus de liberté.

### 1.2 Exemples

On peut donner des exemples simples pour se familiariser avec cette notion. Considérons la courbe planaire définie par :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (at + b, ct + d) \end{cases}$$

On peut nommer ses deux composantes  $x(t)$  et  $y(t)$ . On peut alors déterminer le support de cette courbe paramétrée en écrivant que  $t = \frac{x(t)-b}{a}$  et donc que  $y(t) = \frac{c}{a}(x(t) - b) + d$ . Cette courbe paramétrée est donc portée par la droite d'équation  $y = \frac{c}{a}x - \frac{bc}{a} + d$ .

On peut également donner comme exemple classique une paramétrisation du cercle unité par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . On voit bien ici que la substitution n'est pas la meilleure façon de déterminer le support de cette courbe paramétrée, car nous sommes en présence de la définition même du cercle trigonométrique. Nous pouvons néanmoins passer par cette dernière (bien que ce raisonnement ne soit pas nécessaire) :  $x(t) = \cos t \implies t = \pm \arccos x$ . On a donc  $y(x) = \sin(\pm \arccos x) = \pm \sqrt{1 - x^2}$ .

Le support est donc bien la réunion des deux demi-cercle centrés sur l'origine à valeurs respectivement uniquement positives et uniquement négatives : c'est le cercle unité.

Il est important de noter que le support  $\Gamma$  d'une courbe paramétrée peut admettre plusieurs paramétrisations (on parlera plus tard de changement de paramètre admissible). Par exemple, les courbes  $\gamma_a(t) = (\cos at, \sin at)$  avec  $a \in \mathbb{R}$  admettent toutes pour support le cercle unité. Mais on peut relever des paramétrisations moins triviales de ce dernier, comme  $\gamma(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ , le représentant privé du point  $(-1, 0)$ .

On retrouve également les courbes paramétrées en physique, pour décrire le mouvement d'un objet et ainsi d'en déterminer la trajectoire. Quand un objet est lancé à une vitesse de composantes  $\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$ , depuis le point  $(x_0, y_0)$  dans un champ uniforme de pesanteur de valeur  $g$ , on peut déterminer la courbe paramétrée décrivant son mouvement. On obtient donc le cas classique :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ -gt + v_{0y} \end{pmatrix} \implies \gamma(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ -g\frac{t^2}{2} + v_{0y}t + y_0 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la trajectoire de l'objet, c'est à dire le support de  $\gamma$ , il suffit d'exprimer  $t$  en fonction de la composante horizontale de  $\gamma$  et de substituer cette expression dans la composante verticale.

## 1.3 Paramétrisation par longueur d'arc

### 1.3.1 Changement de paramètre admissible

Nous allons introduire la notion de changement de paramètre admissible. Pour ce faire, il nous faut établir des bases formelles et théoriques.

**Définition 1** Soit  $\varphi$  une application bijective de  $I$  dans  $J$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si son application réciproque  $\varphi^{-1}$  est elle aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut qualifier  $\varphi$  de  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

**Proposition 1** Soit  $\varphi$  une application de  $I$  dans  $J$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$  alors  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. On admettra cette propriété.

**Définition 2** Soient  $(I, \gamma_1)$  et  $(J, \gamma_2)$  deux courbes paramétrées. On peut dire des ces courbes qu'elles sont équivalentes s'il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi : I \rightarrow J$  tel que  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ . On qualifiera alors  $\varphi$  de changement de paramètre admissible.

Nous pouvons à présent revenir sur les exemples de la partie précédente. Considérons la courbe paramétrée  $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (at + b, ct + d) \end{cases}$ .

On peut alors définir l'application  $\varphi$  trivialement  $\mathcal{C}^1$  définie par  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 2t \end{cases}$ .

On a  $\varphi'(t) = 2 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , ainsi  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. C'est un changement de paramètre admissible. On peut donc dire que la courbe paramétrée  $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t)) = (2at + b, 2ct + d)$  est équivalente à  $\gamma(t)$ , et représente une autre paramétrisation de la droite d'équation  $y(t) = \frac{c}{a}(x(t) - b) + d$ .

On définit également une courbe régulière comme étant une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de  $t$  dans son ensemble de définition (jamais égale au vecteur nul).

### 1.3.2 Longueur d'une courbe

On peut définir la longueur  $L(\Gamma)$  de la courbe  $\Gamma$  comme la longueur d'une ligne brisée (dite polygonale) suivant la courbe. On peut subdiviser  $\Gamma$  par les points  $M_i$  de coordonnées  $\gamma(t_i)$ , on fait ainsi passer notre ligne brisée par l'ensemble de ces points et sa longueur quand le nombre de points approche l'infini est la longueur de la courbe. Pour ne pas alourdir la lecture, nous ne détaillerons pas ce procédé de manière rigoureuse, mais il n'en reste pas moins l'idée naturelle derrière la détermination de la longueur d'une courbe. En effet, ce passage à la limite infinie d'une somme de longueurs de segments d'une ligne polygonale introduit instinctivement l'idée d'une intégrale, qui lève toute approximation. Notons que la longueur peut ne pas être calculable (courbe fractale de longueur infinie par exemple, comme le Flocon de Koch), le cas échéant, elle sera qualifiée de non-rectifiable. On définit exactement la longueur de la courbe  $\Gamma$  par :

**Théorème 1** La longueur de la courbe paramétrée  $([a, b], \gamma)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est  $L(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

*Preuve :* Commençons par montrer que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1 \implies$  son support est rectifiable. On généralisera le théorème fondamental de l'analyse aux fonctions vectorielles, en calculant simplement l'intégrale sur chaque composante de la fonction vectorielle en question. On traduit donc simplement cela sous la forme :

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt$$

En prenant la norme de part et d'autre de cette égalité, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

On peut donc sommer les longueurs de ces segments élémentaires sur  $i$  et obtenir :

$$L(\Gamma) = \sum_i M_i M_{i+1} \leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Nous avons majoré la longueur de la courbe par l'intégrale d'une fonction réelle sur un interval fini, qui est un réel fini. On a donc prouvé que  $L(\Gamma)$  est fini, et ainsi que la courbe est rectifiable. Démontrons à présent la formule du théorème précédent. Pour ce faire on considère la fonction  $l(t)$  retournant la longueur de  $\Gamma$  sur l'intervalle  $[a, t]$ . Montrons que  $l$  est dérivable et calculons sa dérivée en utilisant la définition de cette dernière par le taux d'accroissement. On a donc  $h > 0$ . Commençons par écrire que le segment  $[\gamma(t)\gamma(t+h)]$  est nécessairement plus court (ou de longueur égale) que la courbe elle-même sur l'intervalle  $[\gamma(t), \gamma(t+h)]$  :

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq l(t+h) - l(t)$$

En réutilisant la majoration de  $L(\Gamma)$ , et en considérant la courbe  $\Gamma'$  n'existant uniquement sur l'intervalle  $[t, t+h]$ , on obtient :

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq l(t+h) - l(t) \leq \int_t^{t+h} \|\gamma'(t)\| dt$$

En divisant ces inéquation par  $h$ , on fait apparaître le taux d'accroissement, et en utilisant encore le théorème fondamental de l'analyse on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} &\leq \frac{l(t+h) - l(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} \leq \frac{l(t+h) - l(t)}{h} \leq \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient donc  $l$  dérivable et  $\|\gamma'(t)\| \leq l'(t) \leq \|\gamma'(t)\| \implies l'(t) = \|\gamma'(t)\|$ . On a par définitions que  $l(a) = 0$ . On peut donc intégrer et obtenir :

$$l(t) = \int_a^t \|\gamma'(\zeta)\| d\zeta \implies L(\Gamma) = l(b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

CQFD

### 1.3.3 Paramétrisation par longueur d'arc

Nous avons vu dans (1.3.1) qu'une courbe paramétrée peut admettre plusieurs paramétrisations en passant par la notion de changement de paramètre admissible. On introduit alors la notion d'une paramétrisation "naturelle", que l'on qualifiera de normale ou de paramétrisation par longueur d'arc.

**Définition 3** On dit de la courbe paramétrée  $(I, \gamma)$  qu'elle est paramétrée par longueur d'arc si  $\forall t \in I$  on a  $\|\gamma'(t)\| = 1$

Nous pouvons illustrer cette notion en se représentant un point parcourant la courbe à vitesse constante unitaire. L'un des avantages de cette nouvelle paramétrisation est évident : on a pour une paramétrisation normale  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$$

On définit l'application appelée abscisse curviligne de la courbe paramétrée  $([a, b], \gamma)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et de longueur  $L$  comme suit :

$$s : \begin{cases} [a, b] \rightarrow [0, L] \\ t \mapsto \int_a^t \|\gamma'(\zeta)\| d\zeta \end{cases}$$

Cette application est bien définie car nous avons montré précédemment qu'une courbe  $\mathcal{C}^1$  est rectifiable.

On peut illustrer cette dernière par l'association de l'instant  $t$  et de la distance parcourue par un point  $M$  entre les instants  $a$  et  $t$  pour  $t \in [a, b]$ . On démontre que si  $(I, \gamma)$  est régulière,  $s$  est changement de paramètre admissible, en argumentant que  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$  par définition d'une courbe régulière et que  $s$  est  $\mathcal{C}^1$ .

On donne à présent un procédé pour donner la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe  $([a, b], \gamma)$  régulière.

**Théorème 2** *La courbe équivalente à  $([a, b], \gamma)$  définie par  $([0, L], \gamma \circ s^{-1})$  est paramétrée par longueur d'arc.*

On prouve ce théorème par dérivation de  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ . On obtient rapidement, en utilisant les formules de dérivation des fonctions composées et réciproques, que  $\tilde{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} = 1$ . On a donc bien la définition d'une courbe paramétrée par longueur d'arc. On peut donc associer à toute courbe régulière une paramétrisation par longueur d'arc ; en théorie, mais en pratique cela est plus compliqué. En effet, il est possible de calculer une paramétrisation par longueur d'arc de manière exacte uniquement dans de très rares cas. La plupart du temps, l'exprimer est impossible en terme de fonctions rationnelles.

## Exemples

- On se propose de déterminer une paramétrisation par longueur d'arc pour une droite. On a la courbe paramétrée  $([a, b], \gamma)$  avec  $\gamma(t) = (t, at + b)$ . On calcule son abscisse curviligne :

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\zeta)\| d\zeta = \int_0^t \sqrt{1 + a^2} d\zeta = t\sqrt{1 + a^2}$$

On détermine l'application réciproque :

$$s(t) = t\sqrt{1 + a^2} \implies s^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + a^2}}$$

On compose  $s^{-1}$  par  $\gamma$  :

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} + b \end{pmatrix}$$

On obtient donc  $\tilde{\gamma}$ , une paramétrisation par longueur d'arc de la droite d'équation  $y = ax + b$ .

- On donne un deuxième exemple, celui d'un cercle de rayon  $a$ . On a la courbe paramétrée  $([0, 2\pi], \gamma)$  avec  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ . On calcule son abscisse curviligne :

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_0^t \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} d\theta = \int_0^t a d\theta = at$$

On détermine l'application réciproque :

$$s(t) = at \implies s^{-1}(t) = \frac{t}{a}$$

On compose  $s^{-1}$  par  $\gamma$  :

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t/a \\ \sin t/a \end{pmatrix}$$

On obtient donc  $\tilde{\gamma}$ , une paramétrisation par longueur d'arc du cercle de rayon  $a$ .

Nous pourrions également réaliser ce procédé pour une courbe gauche : l'hélice. Il suffit d'ajouter une troisième composante  $ct$  à  $\gamma$ . La démarche est semblable à l'exemple du cercle.

Nous voyons que nous devons intégrer la racine carrée de la somme des carrés des composantes. Nous aurons donc dans la plupart des cas à intégrer la racine carrée d'un polynôme de degré supérieur à 2, ce qui est souvent infaisable à l'aide de fonctions classiques (il nous faudra, pour les cas où le calcul est possible, utiliser des fonctions spéciales, elliptiques, etc...). C'est pourquoi il est intéressant de définir une classe de courbes (on restera ici dans le plan) dont la somme des carrés des composantes est elle-même le carré parfait d'un autre polynôme. En effet cela annulera la racine carrée introduite par la norme, et permettra de calculer exactement  $s(t)$ . C'est la classe des courbes à hodographe pythagoricien, que nous qualifions de courbes PH dans la suite de document. Ces courbes ont donc, entre autres propriétés attractives, celle d'admettre un mesurage exact de leur longueur d'arc par la simple évaluation d'un polynôme.

## 1.4 Repère mobile, courbure et torsion d'une courbe

### 1.4.1 Courbe paramétrée par longueur d'arc

Grâce à la paramétrisation par longueur d'arc, nous pouvons définir les concepts de cette partie plus simplement. C'est l'un des grands intérêts de cette dernière. On se placera donc dans

le cas d'une courbe paramétrée, fonction de son abscisse curviligne,  $\gamma(s)$  (en d'autres termes,  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc). On précise que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe régulière et de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 2$ .

Nous souhaitons construire en tout point  $M(s)$  (de coordonnées  $\gamma(s)$ ) un repère orthonormé direct : le repère mobile. On souhaite utiliser ce repère pour tirer des informations géométriques sur la courbe en question : la courbure et la torsion.

On peut illustrer ces deux grandeurs de manière intuitive en disant que la courbure mesure la vitesse à laquelle la courbe s'éloigne de la tangente et que la torsion est la vitesse à laquelle elle s'éloigne du plan osculateur. Nous définirons ces termes plus bas dans cette partie.

Comme  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, on a nécessairement  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . On dérive alors une deuxième fois pour obtenir une valeur non-constante.

**Définition 4** On appelle le réel  $\|\gamma''(s)\| = k(s)$  la courbure de  $\gamma$  en  $s$ . Si  $k(s) \neq 0$  on appelle le nombre  $\frac{1}{k(s)}$  le rayon de courbure.

**Définition 5** On appelle le vecteur normal le vecteur défini pour tout  $s$  de  $I$  ou  $k(s) \neq 0$ , par  $n(s) = \frac{1}{k(s)}\gamma''(s)$ . Le vecteur normal est par définition unitaire.

On rappelle que le vecteur défini par la dérivée de  $\gamma$  au point  $s$  est tangent à  $\gamma$ . En physique, on l'illustre par le vecteur vitesse, et on sait que la vitesse est tangente au déplacement. On a donc l'intuition que  $\gamma'(s)$  et  $n(s)$  sont orthogonaux, c'est d'ailleurs ce que nous recherchons pour construire un repère orthonormé.

Nous pouvons le démontrer. En effet, ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0. On sait que :

$$\|\gamma'(s)\| = 1 \implies \|\gamma'(s)\|^2 = 1 \implies \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$$

On peut dériver ce produit scalaire de la même manière qu'un produit classique :

$$[\langle u, v \rangle]' = \langle u', v \rangle + \langle v', u \rangle \implies \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$$

En utilisant la définition du vecteur normal et les propriétés de bilinéarité et de commutativité du produit scalaire, nous pouvons écrire :

$$2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0 \implies 2k(s)\langle \gamma'(s), n(s) \rangle = 0$$

Or on sait par définition que  $k(s) \neq 0$ . On a donc

$$\langle \gamma'(s), n(s) \rangle = 0 \implies \gamma'(s) \perp n(s)$$

Pour plus de clarté, nous appellerons désormais  $t(s)$  le vecteur unitaire tangent, tel que  $\gamma'(s) = t(s)$ . Pour former un repère orthonormé, il nous faut définir un troisième vecteur. On se base

donc sur la définition même d'un repère orthonormé pour définir ce vecteur par :

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

Par définition du produit vectoriel dans l'espace, on sait que  $b(s)$  est orthogonal au plan formé par  $t(s)$  et  $n(s)$ , appelé plan osculateur. Nous avons donc bien construit un repère orthonormé en tout point  $M(s)$  de coordonnées  $\gamma(s)$  avec  $s$  dans  $I$ .

Nous avons défini la courbure d'une courbe mais pas sa torsion. On va démontrer que cette dernière se définit comme la fonction  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  :

*Preuve* : Commençons par justifier que, comme écrit dans cette expression,  $b'(s)$  et  $n(s)$  sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un réel  $a$  tel que  $b'(s) = an(s)$ . On utilise la définition de  $b(s)$  et en dérivant ce produit vectoriel on obtient :

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s)$$

car  $t'(s)$  et  $n(s)$  sont colinéaires (ils sont tous deux portés par le vecteur  $\gamma''(s)$ ). On a montré que  $b'(s)$  est orthogonal à  $t(s)$ . Il nous faut à présent montrer qu'il est également orthogonal à  $b(s)$ . On a :

$$\begin{aligned} b(s) = t(s) \wedge n(s) &\implies \|b(s)\| = \|t(s)\| * \|n(s)\| * |\sin(t(s), n(s))| = 1 * 1 * |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \\ &\implies \|b(s)\|^2 = 1 \implies \langle b(s), b(s) \rangle = 1 \end{aligned}$$

On peut dériver et obtenir par commutativité du produit scalaire :

$$2\langle b(s), b'(s) \rangle = 0$$

Ainsi  $b'(s)$  est orthogonal à  $t(s)$  et à  $b(s)$ , il est donc nécessairement colinéaire à  $n(s)$ . On appellera  $\tau(s)$  le coefficient de colinéarité. On rappelle que  $t'(s) = k(s)n(s)$ . Nous avons donc établi deux relations entre le repère mobile et les grandeurs de courbure et torsion :

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases}$$

Nous allons établir une troisième relation pour compléter ce système et obtenir ce que l'on appelle les équations de Frenet. Nous allons exprimer  $n'(s)$  en fonction de  $t(s), n(s), b(s)$ .

On utilise la même méthode que précédemment pour montrer que  $n'(s)$  est orthogonal à  $n(s)$  : on justifie que la norme vaut 1, on dérive le produit scalaire qui en résulte et l'identifions comme étant nul. On a donc  $n'(s)$  dans le plan défini par  $t(s)$  et  $b(s)$ , il peut donc s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces derniers. Il existe donc deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$n'(s) = \alpha t(s) + \beta b(s)$$

Or on sait que  $b'(s) = t(s) \wedge n'(s)$ . Cela implique

$$b'(s) = t(s) \wedge (\alpha t(s) + \beta b(s)) = \beta t(s) \wedge b(s) = -\beta n(s)$$

par anticommutativité du produit vectoriel.

On a vu que  $b'(s) = \tau(s)n(s)$ , on peut donc, par identification, obtenir  $\beta = -\tau(s)$ .

On peut dériver l'égalité  $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$  et obtenir

$$[\langle t(s), n(s) \rangle]' = \langle t'(s), n(s) \rangle + \langle t(s), n'(s) \rangle = 0$$

On a  $t'(s) = k(s)n(s)$  et  $n'(s) = \alpha t(s) - \tau(s)b(s)$ , on en déduit en utilisant les propriétés du produit scalaire

$$k(s)\langle n(s), n(s) \rangle + \alpha\langle t(s), t(s) \rangle - \tau\langle t(s), b(s) \rangle = 0 \implies k(s) + \alpha = 0 \implies \alpha = -k(s)$$

On a donc enfin les équations de Frenet :

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases} \quad (1.1)$$

.

Connaître ces informations sur une courbe est très intéressant du fait du théorème suivant :

**Théorème 3** *Théorème fondamental des courbes (admis) : Deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont congruentes, c'est à dire qu'elles sont identiques à une composition de translations et de rotations (isométrie) prêt, si et seulement si leur paramétrisations par longueur d'arc respectives  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  vérifient  $k_1(s) = k_2(s)$  et  $\tau_1(s) = \tau_2(s)$  pour tout  $s \in [0, L]$ .*

## 1.4.2 Courbe à paramétrisation quelconque

### Courbure et torsion

Nous avons vu que la paramétrisation normale apporte un cadre propice à la détermination de la courbure, de la torsion et du repère mobile. Malheureusement, cette paramétrisation est très souvent compliquée à établir, et on devra donc dans la majorité des cas se contenter d'utiliser une paramétrisation quelconque. Pour bien différencier le repère mobile dans le cas d'une paramétrisation par longueur d'arc et dans le cas d'une paramétrisation quelconque, on notera  $(T(t), N(t), B(t))$  le repère de Frenet au point  $M(t)$  dans cette partie. Naturellement, toutes les fonctions que nous manipulerons seront à présent fonctions de  $t$  et non plus de l'abscisse curviligne  $s$ . On notera  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ .

Nous cherchons l'expression de  $k(t)$  et  $\tau(t)$  pour une paramétrisation quelconque. Pour les de-

terminer on commence par calculer  $\gamma''(t)$  :

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = v(t)T(t) \implies \gamma''(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)$$

Calculons donc  $T'(t)$ . Pour ce faire, on utilise la paramétrisation normale  $\tilde{\gamma}$  et son abscisse curviligne  $s$ . On a donc  $T(t) = \tilde{\gamma}'(s(t))$ . Nous pouvons dériver cette expression et obtenir grâce aux formules de Frenet

$$T'(t) = \tilde{\gamma}''(s(t))s'(t) = \tilde{\gamma}''(s(t))\|\gamma'(t)\| = v(t)k(t)N(t)$$

Nous pouvons donc réinjecter cette expression de  $T'(t)$  dans l'expression de  $\gamma''(t)$  :

$$\gamma''(t) = v'(t)T(t) + k(t)v^2(t)N(t)$$

Développons à présent le produit vectoriel  $\gamma' \wedge \gamma''$  :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= v(t)T(t) \wedge (v'(t)T(t) + k(t)v^2(t)N(t)) \\ &= v(t)T(t) \wedge v'(t)T(t) + k(t)v^3(t)N(t) = k(t)v^3(t)T(t) \end{aligned}$$

En passant à la norme on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \|k(t)v^3(t)T(t)\| = k(t)\|v^3(t)\| \quad \text{car } T(t) \text{ est unitaire.} \\ \implies k(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|v^3(t)\|} = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \end{aligned} \quad (1.2)$$

On admettra que pour une courbe paramétrée non nécessairement normalement, on aura

$$\tau(t) = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \wedge \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \quad (1.3)$$

On ne donnera pas de démonstration à cette formule mais le raisonnement est similaire à celui de la formule sur  $k(t)$ , les calculs sont simplement plus lourds.

### Repère $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t))$

Déterminons les expressions des vecteurs composant le repère de Frenet, toujours dans le cas d'une paramétrisation non nécessairement normale. On a trivialement

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (1.4)$$

Réutilisons les expressions suivantes établies précédemment :  $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = k(t)v^3(t)N(t)$  et  $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = k(t)\|v(t)\|^3$ . Ces dernières nous donnent directement

$$T(t) \wedge N(t) = B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{k(t)v^3(t)N(t)} = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} \quad (1.5)$$

On a donc déterminé  $T(t)$  et  $B(t)$ . Or, comme le repère de Frenet est orthonormé, nous avons  $N(t) = B(t) \wedge T(t)$ . Ainsi

$$N(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \wedge \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} \quad (1.6)$$

On a donc complètement défini les repère de Frenet, la courbure et la torsion d'une courbe paramétrée de manière quelconque, et cela en passant par la théorie de la paramétrisation par longueur d'arc. On voit donc que cette théorie est un outil peu applicable à des cas pratiques (longueur d'une courbe par exemple), mais très utile pour engendrer d'autres résultats.

## Chapitre 2

# Courbes de Bézier

### 2.1 Historique

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétriques polynomiales. Elles sont décrites pour la première fois en 1962 par Pierre Bézier, ingénieur chez Renault. Elles étaient utilisées par l'entreprise pour concevoir des pièces automobiles, à l'heure où toutes les pièces aux géométries complexes étaient modélisées à la main. C'est seulement en 1975, quand W. Böhm rend public des travaux de recherche de chez Citroën, que l'on s'aperçoit que Paul de Faget de Casteljaou, normalien et ingénieur, en avait déjà apporté une construction par un algorithme en 1959, soit deux ans avant Pierre Bézier. Cet algorithme a donné une façon très efficace de tracer des courbes de Bézier, bien qu'il soit aujourd'hui couramment remplacé par d'autres algorithmes moins coûteux en calculs ou permettant certains procédés nécessaires comme l'antialiasing (anti-crénelage). Nous développerons plus en détail les usages des courbes de Bézier dans la dernière section de ce chapitre.

### 2.2 Construction par l'algorithme de De Casteljaou

La caractéristique principale des courbes de Bézier réside dans le lien entre l'allure de la courbe et la distribution de points appelés points de contrôle de cette dernière. Ces points ne sont en rien des points de passage de la courbe en construction, mais plutôt des points d'attraction, c'est pourquoi on peut définir une construction des courbes de Bézier en utilisant la notion de barycentre.

#### 2.2.1 Rappels sur les barycentres

Toute la construction de De Casteljaou est basée sur les barycentres, on se permet alors de faire quelques rappels les concernant.

**Définition 6** *On appelle barycentre des points  $A_1, \dots, A_n$  d'un espace affine  $E$  pondérés par les*

réels  $a_1, \dots, a_n$  (de somme non nulle), l'unique point  $G$  ou est vérifié

$$\sum_i^n a_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

On parlera d'isobarycentre si  $a_1 = \dots = a_n$ .

Nous nous restreindrons dans ce document à l'étude des courbes de Bézier planaires. Nous allons voir que la définition de la construction de De Casteljaou dans le plan ne nécessite que l'utilisation du barycentre de deux points. On peut donc simplifier notre définition :

**Définition 7** On appelle barycentre de deux points  $A$  et  $B$  pondérés par les coefficients  $a$  et  $b$  tels que  $a + b \neq 0$ , l'unique point  $G$  ou est vérifié

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$$

On montre très facilement que le barycentre de deux points se trouve nécessairement sur la droite les reliant. Nous pouvons donc considérer tous les points d'une droite comme le barycentre de deux points y appartenant, grâce aux coefficients de pondération  $a$  et  $b$ . On note que si  $a = b$ , le barycentre est le milieu du segment  $[AB]$ .

Nous rapporterons, dans ce chapitre, le plan au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Nous souhaitons que le point  $G$ , que nous renommerons en  $M$ , barycentre des points  $A$  et  $B$ , puisse parcourir l'ensemble du segment  $[AB]$ .

Pour cela, nous choisirons un paramètre  $t \in [0, 1]$ , tel que  $(1-t)\vec{MA} + t\vec{MB} = \vec{0}$ . On ramène cette définition à l'origine :

$$\begin{aligned} (1-t)\vec{MA} + t\vec{MB} = \vec{0} &\implies (1-t)(\vec{MO} + \vec{OA}) + t(\vec{MO} + \vec{OB}) = \vec{0} \\ &\implies \vec{MO} + (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{0} \implies (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} = \vec{OM} \end{aligned}$$

On simplifie l'écriture en adoptant la notation suivante :

$$M = (1-t)A + tB \tag{2.1}$$

On voit bien que pour  $t \in [0, 1]$ , le point  $M$  parcourt bien tout le segment  $[AB]$  : en  $t = 0$  on a  $M = A$  et en  $t = 1$  on a  $M = B$ . Nous allons donc utiliser ce principe pour construire des courbes de Bézier.

## 2.2.2 Procédé de construction

On notera en **gras** les objets mathématiques vivant dans  $\mathbb{R}^2$  dans la suite de ce rapport. On introduit cette construction dans le cas non trivial le plus simple : une parabole définie par trois points de contrôle. On note donc  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  trois points du plan. On définit également, pour  $t \in [0, 1]$ , deux points  $\mathbf{P}_1^1$  et  $\mathbf{P}_2^1$  comme étant respectivement le barycentre mobile des couples

$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$  et  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  pondérés des coefficients "d'attraction"  $(1 - t)$  et  $t$ . On peut donc résumer la situation comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1^1 = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 & \in [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1] \\ \mathbf{P}_2^1 = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 & \in [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] \end{cases} \quad (2.2)$$

On peut alors définir un nouveau segment mobile  $[\mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2^1]$  auquel on peut attribuer le barycentre  $\mathbf{P}_2^2$  tel que

$$\mathbf{P}_2^2 = (1 - t)\mathbf{P}_1^1 + t\mathbf{P}_2^1$$

On voit bien que l'on ne peut plus construire de nouveau point car notre dernière génération ne se compose que d'un seul barycentre. On nomme alors  $\Gamma$  le trajet de ce dernier point entre  $t = 0$  et  $t = 1$  : nous avons construit une courbe de Bézier.

Pour résumer le procédé que nous venons d'expliquer, nous avons choisi trois points de contrôle fixes. Ces trois points ont engendré une première génération de deux barycentres, qui ont eux mêmes engendré une deuxième génération d'un unique barycentre. Le processus récursif s'arrête alors car on ne plus générer de nouveau point. L'équation de ce dernier point pour  $t \in [0, 1]$  décrit alors la courbe de Bézier définie par les trois points de contrôles originels.

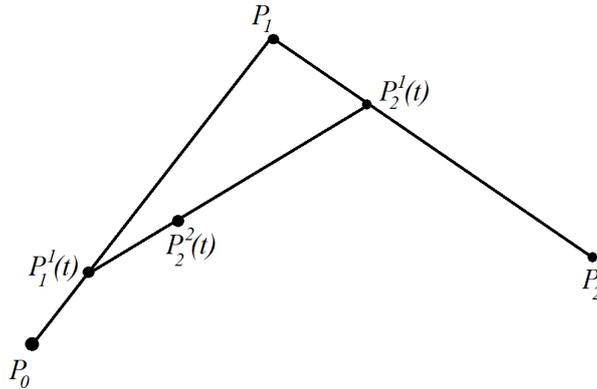


FIGURE 2.1 – Représentation de la construction récursive du point parcourant la courbe de Bézier définie par trois points

On peut donc généraliser cette construction pour une courbe définie par les  $n + 1$  points  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ . On considerera ces points de contrôle comme étant les points de génération 0 tel que  $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i$ . On peut alors construire de manière récursive le  $(i + 1)$ -ième point de  $(a + 1)$ -ième génération avec :

$$\mathbf{P}_{i+1}^{a+1}(t) = (1 - t)\mathbf{P}_i^a(t) + t\mathbf{P}_{i+1}^a(t) \quad , r = 0, \dots, n - 1 \quad \text{et} \quad i = r, \dots, n - 1 \quad (2.3)$$

On peut alors dire que  $\gamma$  définie par  $\gamma(t) = \mathbf{P}_n^n(t)$  est la courbe de Bézier de degré  $n$  définie par le polygone de contrôle  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ .

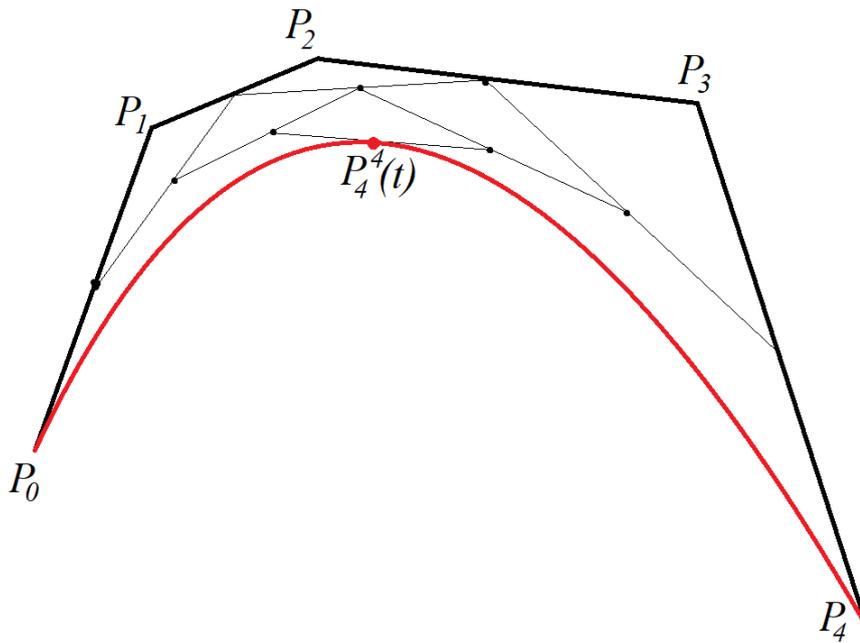


FIGURE 2.2 – Courbe de Bézier munie de son polygone de contrôle à 5 points. Seul le point décrivant la courbe, donc le point de dernière génération est nommé.

## 2.3 Construction par les polynômes de Bernstein

### 2.3.1 Définition

Outre l'algorithme de De Casteljaou, les courbes de Bézier peuvent être caractérisées par une autre définition, en utilisant une famille de polynômes nommés les polynômes de Bernstein. On présente ces polynômes comme suit :

**Définition 8** Pour un degré  $n \geq 0$ , il y a  $n + 1$  polynômes de Bernstein, notés  $B_0^n, \dots, B_n^n$ , et définis sur  $[0; 1]$  par :  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ , où  $\binom{n}{i}$  sont les coefficients binomiaux définis par  $\frac{n!}{i!(n-i)!}$

Montrons que les  $n + 1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$  constituent une base de  $\mathbb{R}^n[X]$ , espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .

Pour ce faire, il nous suffit de montrer que pour le  $n + 1$ -uplet de réels  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ , on a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i B_i^n(t) = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On a donc l'expression :

$$\lambda_0 \binom{n}{0} (1-t)^n + \dots + \lambda_n \binom{n}{n} t^n = 0$$

Si nous évaluons cette expression en  $t = 0$  nous avons  $\lambda_0 = 0$  et en  $t = 1$  nous avons  $\lambda_n = 0$ . Notre égalité devient donc :

$$\lambda_1 \binom{n}{1} t(1-t)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1}(1-t) = 0$$

On peut alors simplifier par  $t(1-t)$  pour retomber sur une expression similaire à la première :

$$\lambda_1 \binom{n}{1} (1-t)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-2} = 0$$

que nous pouvons donc réévaluer en  $t = 0$  et en  $t = 1$  pour avoir  $\lambda_1 = \lambda_{n-1} = 0$ . De proche en proche, nous arrivons à  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ , nous pouvons donc conclure que la famille des  $n + 1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^n[X]$ . On sait qu'une famille libre de  $m$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $m$  est génératrice. Elle est donc une base de l'espace vectoriel considéré. Ainsi, les  $n + 1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$  constituent une base de  $\mathbb{R}^n[X]$ .

On pourra donc toujours exprimer un polynôme  $p(t)$  de degré  $n$  comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré  $n$  de la forme :

$$p(t) = \sum_{k=0}^n a_k B_k^n(t) \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Propriétés

Nous allons à présent lister quelques unes des propriétés fondamentales de ces polynômes.

**Proposition 2** *Principales propriétés des polynômes de Bernstein*

1. **Partition de l'unité** :  $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$
2. **Positivité** :  $\forall i \in \{0, \dots, n\}, B_i^n(t) \geq 0$
3. **Symétrie** :  $\forall i \in \{0, \dots, n\}, B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
4. **Unicité du maximum** :  $B_k^n(t)$  n'admet qu'un seul maximum sur  $t \in [0; 1]$ , atteint en  $t = \frac{k}{n}$

Nous n'apporterons ici pas de preuve à ces propriétés. On note néanmoins que ces résultats sont aisés à retrouver.

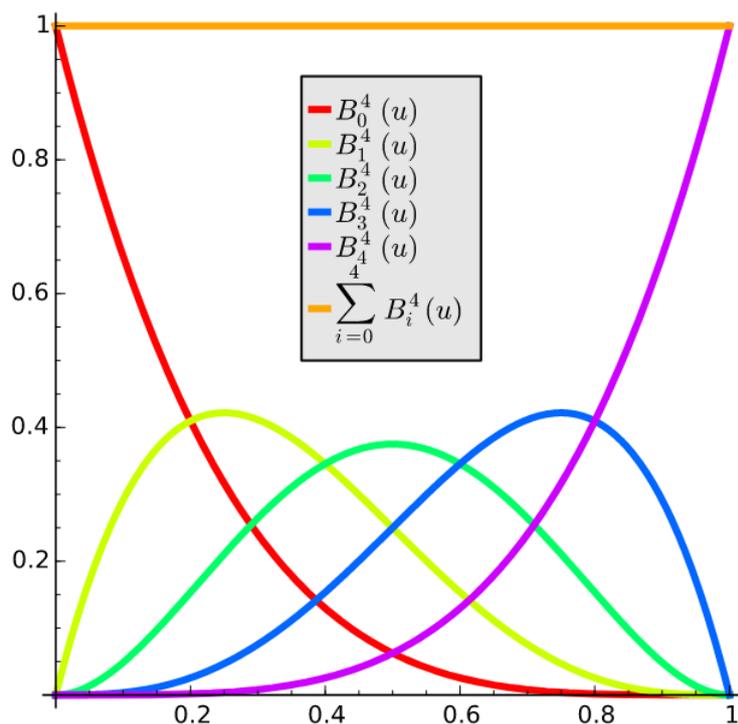


FIGURE 2.3 – Courbes représentatives des 5 polynômes de Bernstein de degré 4 et de leur somme sur  $[0, 1]$

Nous serons par la suite amenés à dériver et intégrer des polynôme de Bernstein, il est donc opportun d'apporter ces deux formules :

- **Dérivation :**

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] \quad (2.5)$$

*Preuve :*

Par dérivation directe. On a :

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \frac{d}{dt} \left( \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \right) = \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1}$$

On rappelle les relations binomiales suivantes :

$$\frac{i}{n} \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} \quad \text{et} \quad \frac{n-i}{n} \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i}$$

On fait donc apparaître ces coefficients :

$$n \left[ \binom{n}{i} \frac{i}{n} t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \binom{n}{i} t^i \frac{n-i}{n} (1-t)^{n-i-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= n \left[ \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \right] \\
&= n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]
\end{aligned}$$

- **Intégration :**

$$\int B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t) \quad (2.6)$$

*Admise*

Quel est le rapport entre ces polynômes et les courbes de Bézier ? Il est possible d'exprimer l'équation d'une courbe de Bézier grâce à ces derniers. En effet :

**Théorème 4** *L'équation de toute courbe de Bézier de degré  $n$  peut s'écrire*

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)$$

avec  $\mathbf{P}_i$  le  $i$ -ième point du polygone de contrôle de la courbe en question.

Cette construction est certes moins élégante et visuelle qu'avec l'algorithme de De Casteljau, mais permet d'obtenir instantanément (sans nécessité d'itérations) l'équation de la courbe. On retrouve facilement les expressions des polynômes de Bernstein en développant l'équation du barycentre de dernière génération dans la construction de De Casteljau.

## 2.4 Utilisation des courbes de Bézier

### 2.4.1 Propriétés mathématiques

Les courbes de Bézier ont trois propriétés essentielles.

**Proposition 3** *Propriétés fondamentales des courbes de Bézier*

- *La courbe de Bézier définie par le polygone de contrôle  $P$  est toujours contenue dans l'enveloppe convexe de  $P$ .*
- *Toute courbe de Bézier de polygone de contrôle  $P$  vérifie que  $\mathbf{P}_n^n(0) = \mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{P}_n^n(1) = \mathbf{P}_n$ .*
- *Une courbe de Bézier est affinement invariante, c'est à dire que si  $f$  est une transformation affine (on ne donnera pas de définition rigoureuse mais on retiendra qu'elles englobent rotations, homothéties, translations etc...), alors l'image de la courbe de Bézier définie par le polygone  $P$  est la courbe de Bézier de degré  $n$  définie par  $f(P) = (f(\mathbf{P}_0), \dots, f(\mathbf{P}_n))$ .*

On s'attardera sur le caractère crucial de cette dernière propriété : elle signifie que pour transformer une courbe de Bézier, il suffit d'appliquer la transformation voulue à son polygone de contrôle et de tracer la nouvelle courbe à partir du nouveau polygone. C'est grâce à cette propriété que ces courbes sont très utilisées en particulier dans la création des polices de caractère, comme nous allons le voir dans la section suivante.

## 2.4.2 Usages concrets

Les courbes de Bézier ont de nombreuses applications, particulièrement dans le domaine de l'infographie. On en développera ici une liste non exhaustive.

- L'utilisation la plus courante des courbes de Bézier est le dessin vectoriel. Elles en sont l'outil de base. Le principe du dessin vectoriel vient de son opposition au dessin matriciel (formats de fichier .png, .bmp, .jpeg etc...) pour lequel une image est représentée par une matrice de pixels. En effet, une image vectorisée est composée d'objets géométriques individuels comme des polygones, arcs de cercle, segments et courbes de Bézier. On peut donc ensuite appliquer des transformations à ces éléments (rotations, homothéties, similitudes, symétries etc...) définis mathématiquement afin de ne pas perdre en résolution. Dans le cas d'un grossissement par exemple, une image matricielle trop grossie sera très pixelisée et illisible, dans le cas d'une image vectorielle, cela n'aura aucune incidence.

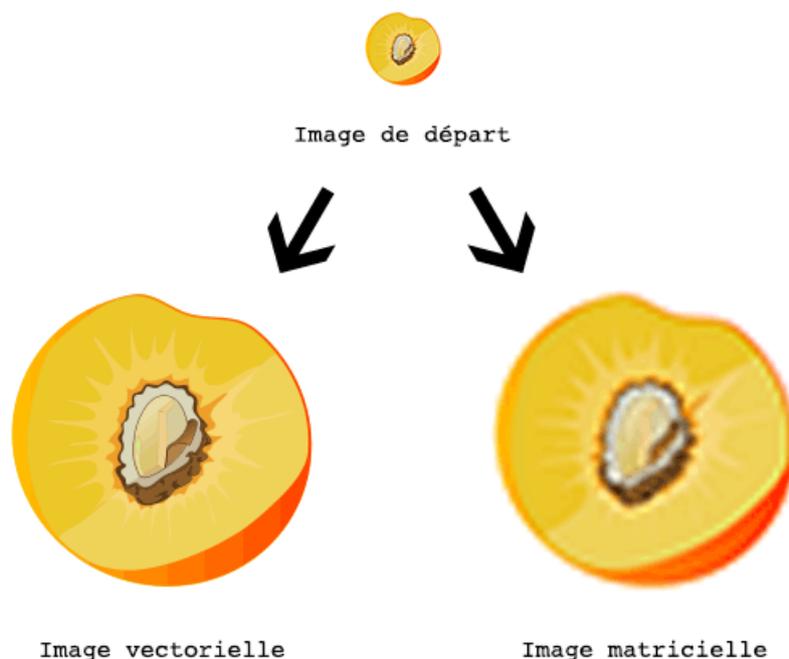


FIGURE 2.4 – Comparaison d'une image vectorielle (gauche) et d'une image matricielle (droite) après un grossissement

On utilise donc récursivement les courbes de Bézier dans le design graphique, l'illustration et l'infographie. Tous les logiciels classiques ont un outil permettant d'en tracer : InkScape, Adobe Illustrator, Adobe Photoshop, Adobe InDesign etc... On notera que ces outils utilisent dans la majorité des cas des courbes cubiques (quatre points de contrôle). C'est pourquoi nous centrerons notre étude sur ce cas dans la suite de ce rapport.

- Il est également possible de tracer des courbes de Bézier cubiques dans le logiciel de dessin matriciel Paint. Il peut être intéressant de mettre cet outil en comparaison avec la construction du barycentre de dernière génération par l'algorithme de De Casteljaou :

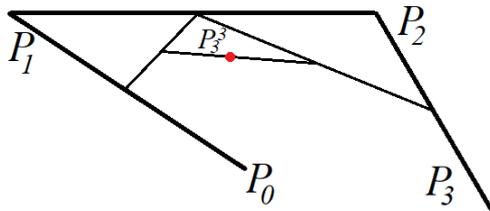


FIGURE 2.5 – Construction du point de dernière génération "à la main"

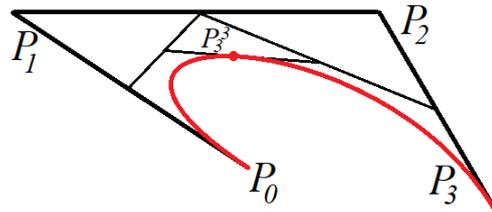


FIGURE 2.6 – Construction de la courbe de Bézier associée aux 4 points à l'aide de l'outil intégré à Paint, en sélectionnant  $P_0$ , puis  $P_3$  suivis de  $P_1$  et  $P_2$ .

Nous voyons immédiatement que la courbe construite par le programme passe bien par le point défini par l'algorithme de De Casteljaou, et heureusement !

- On retrouve des courbes et surfaces de Bézier (voir littérature pour étendre les courbes de Bézier à l'espace) dans les logiciels de création 3D comme Blender ou Cinema4D.
- La dernière utilisation notable que nous citerons ici n'est pas des moindres. En effet, les courbes de Bézier ont révolutionné l'utilisation des polices d'écriture TrueType. C'est grâce à elles (et à d'autres courbes quadratiques nommés les splines, voir littérature) qu'il est possible d'écrire en police 120 sur un logiciel de traitement de texte et de ne pas perdre la fluidité des caractères. On les utilise également pour l'habillage du texte, la gestion des blocs etc...

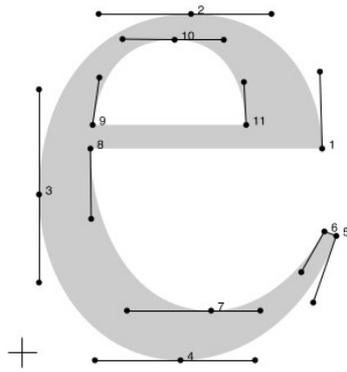


FIGURE 2.7 – La lettre "e" définie par des segments de courbe de Bézier.

## Chapitre 3

# Courbes à hodographe pythagoricien

### 3.1 Les triplets pythagoriciens

**Définition 9** *Un triplet pythagoricien est un triplet d'entiers naturels  $(a, b, c)$  vérifiant la relation fondamentale :*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Les premières traces de ces triplets de nombres remontent à la tablette Plimpton n°322, une tablette d'argile babylonienne écrite vers 1800 av. J.-C. Cette dernière présente 15 couples qualifiés de nos jours de triplets pythagoriciens.

Le nombre de ces triplets est infini, et il est possible d'en exprimer l'ensemble par la propriété suivante :

**Théorème 5** *Un triplet d'entiers  $(a, b, c)$  est un triplet pythagoricien primitif si et seulement si il existe deux entiers  $p$  et  $q$  avec  $0 < p < q$ , de parité différentes et premiers entre eux ( $\gcd(p, q) = 1$ ) tels que  $a = q^2 - p^2$ ,  $b = 2pq$  et  $c = q^2 + p^2$*

On parle ici de triplets primitifs, c'est à dire que l'on exclut des triplets du type  $(ka, kb, kc)$  ou  $k$  est un entier supérieur à 1. Un triplet non primitif peut donc toujours être exprimé à partir d'un triplet primitif, avec l'expression :

$$a = [q^2 - p^2]r \quad , \quad b = 2qpr \quad , \quad c = [q^2 + p^2]r$$

On peut apporter une explication graphique à cette propriété en passant par les nombres complexes.

On rappelle qu'un nombre complexe  $z = a + ib$  avec  $a = \Re(z)$  et  $b = \Im(z)$  peut se représenter dans le plan complexe par le point  $M$  de coordonnées  $(a, b)$ . On dira de ce point qu'il est d'affixe

$z$ .

On introduit la notion de module d'un nombre complexe comme étant la distance du point  $M$  à l'origine. En utilisant le théorème de Pythagore on établit :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour repérer totalement le point  $M$  en coordonnées polaires, on caractérise  $z$  par l'angle que forme le segment  $[OM]$  avec l'axe des réels du plan complexe. On écrira cette grandeur comme suit :

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$$

On démontre aisément que

$$|z^2| = |z|^2 \quad \text{et} \quad \arg(z^2) = 2 \arg(z)$$

Nous pouvons donc remarquer que si nous choisissons un nombre complexe  $z$  avec des parties imaginaire et réelle entières, le carré de son module sera donné par  $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$ , et sera donc entier. Étant donné que  $|z|^2 = |z^2|$ , il nous suffit de considérer le nombre complexe  $z^2$  sous forme algébrique (pour faire apparaître sa partie réelle et sa partie imaginaire) et nous aurons obtenu un triplet pythagorien  $(\Re(z^2), \Im(z^2), |z^2|)$  avec :

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2aib - b^2 = a^2 - b^2 + i2ab \implies \Re(z^2) = a^2 - b^2 \quad , \quad \Im(z^2) = 2ab \quad , \quad |z^2| = a^2 + b^2$$

La situation est résumée sur le schéma suivant :

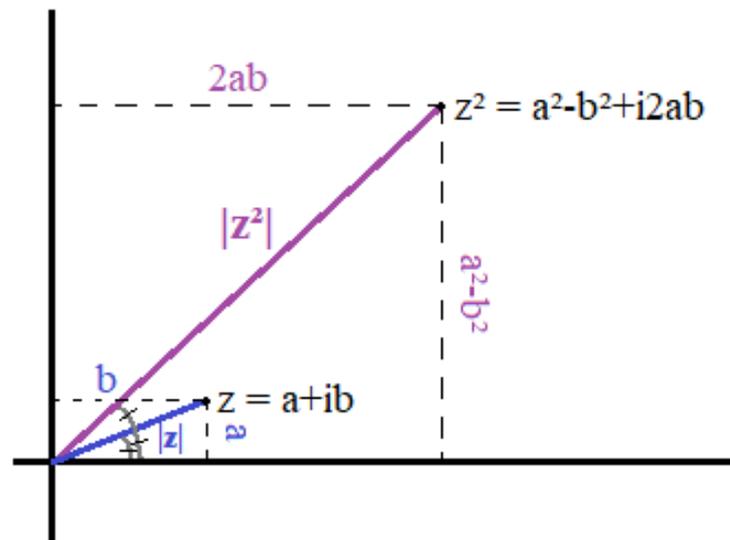


FIGURE 3.1 – Construction graphique d'un triplet pythagorien dans le plan complexe

Nous retombons bien sur la propriété citée en début de partie. Notons qu'il est également possible de démontrer rigoureusement cette propriété à l'aide d'une paramétrisation du cercle unité.

## 3.2 Propriétés des courbes PH

### 3.2.1 Définition

**Définition 10** Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée définie par :

$$\gamma : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

On appelle hodographe de  $\gamma$  la courbe paramétrée  $\gamma'$  avec :

$$\gamma' : \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)) \end{cases}$$

Pour qu'un hodographe du plan  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  soit qualifié de pythagoricien, il doit respecter le critère de Pythagore, c'est à dire :

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$$

avec  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $\sigma(t)$  des polynômes.

Montrons qu'en choisissant trois polynômes  $u(t)$ ,  $v(t)$  et  $w(t)$  tels que :

$$x'(t) = [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t) \quad (3.1)$$

, cette relation est vérifiée :

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= (u^2(t) - v^2(t))^2 w^2(t) + (2u(t)v(t)w(t))^2 \\ &= (u^4(t) - 2(u(t)v(t))^2 + v^4(t)) w^2(t) + 4(u(t)v(t)w(t))^2 \\ &= w^2(t) (u^4(t) + 2(u(t)v(t))^2 + v^4(t)) \\ &= (w(t) [u^2(t) + v^2(t)])^2 \\ &\implies x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comme  $u$  et  $v$  sont des polynômes, la somme de leur carrés l'est aussi. Le produit par  $w(t)$  conserve également le caractère polynomial. On respecte donc bien le critère de Pythagore.

On note qu'on aura  $u(t)$  et  $v(t)$  premiers entre eux (tout facteur commun sera absorbé par  $w(t)$ ).

On prendra également  $w(t)$  un polynôme monique, c'est-à-dire de coefficient dominant  $a = 1$ , car si cela n'est pas le cas, le terme constant  $\sqrt{a}$  pourra être absorbé par  $u$  et  $v$ . En examinant plus en détail la construction de  $x'(t)$  et de  $y'(t)$ , il est opportun d'exclure de notre étude certains cas "dégénérés" :

- Si  $w(t) = 0$  ou bien  $u(t) = v(t) = 0$ , on aura naturellement  $x'(t) = y'(t) = 0$ . La courbe se réduit donc à un point.
- Si les trois polynômes sont constants et qu'au moins un parmi  $u$  et  $v$  est non nul, on obtiendra une ligne droite, présentant trivialement la propriété d'être une courbe PH.
- On obtient également des courbes linéaires dans les cas où  $u$  et  $v$  sont constants (non tous les deux nuls) avec  $w(t)$  non constant ainsi que  $w(t) \neq 0$  et l'un de  $u$  et  $v$  est nul.

### 3.2.2 Degré et conditions de régularité des courbes PH

#### Degré

On s'attardera ici sur la caractérisation des courbes PH par le degré des polynômes constituant leur composantes.

En intégrant la définition (3.1) et en prenant le degré, on obtient que :

$$\deg(x) \leq \deg(w) + 2 \max[\deg(u), \deg(v)] + 1 \quad \text{et} \quad \deg(y) = \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) + 1 \quad (3.3)$$

On remarque que pour  $x$ , nous n'avons utilisé qu'une inégalité. Cela est dû au fait qu'il est possible que les termes dominants s'annulent dans  $u^2 - v^2$ . Mais si  $\deg(u) \neq \deg(v)$ , cela est impossible, on aura donc dans ce cas  $\deg(x) = \lambda + 2\mu + 1$  avec  $\lambda = \deg(w)$  et  $\mu = \max[\deg(u), \deg(v)]$ . Et on voit bien que  $\deg(x) > \deg(y)$ .

On se place à présent dans le cas où  $\deg(u) = \deg(v)$ . On a dans ce cas  $\deg(y) = \lambda + 2\mu + 1 \geq \deg(x)$  que l'annulation ait lieu ou non.

Ainsi on a donc que le degré  $n$  d'une courbe PH avec  $n = \max[\deg(x), \deg(y)]$  vérifie dans tous les cas  $n = \lambda + 2\mu + 1$ .

#### Régularité

On rappelle qu'une courbe paramétrée  $\gamma$  est régulière si son hodographe  $\gamma'$  est non nulle partout où elle est définie. Pour qu'une courbe PH ne soit pas régulière il faudra donc qu'il existe un réel  $t$  tel que  $x'(t) = [u^2(t) - v^2(t)]w(t) = y'(t) = 2u(t)v(t)w(t) = 0$ .

On dira qu'une courbe paramétrée a un point irrégulier (ou singulier) à toute valeur  $\xi$  du paramètre  $t$  pour laquelle  $x'(\xi) = y'(\xi) = 0$ . Une courbe paramétrée est donc irrégulière si son hodographe passe par l'origine du repère.

Pour une courbe PH, l'un des critères suivants induira l'irrégularité d'une courbe :

- $\exists \xi, u^2(\xi) - v^2(\xi) = 0$  et  $u(\xi) = 0$ .

- $\exists \xi, u^2(\xi) - v^2(\xi) = 0$  et  $v(\xi) = 0$ .
- $w(\xi) = 0$

Les deux premiers cas sont naturellement liés et on peut réduire ce choix aux deux options suivantes :  $u^2(\xi) - v^2(\xi) = u(\xi)v(\xi) = 0$  ou bien  $w(\xi) = 0$ .

Or, nous avons  $\gcd(u, v) = 1$ , il est donc impossible d'avoir  $u^2(\xi) - v^2(\xi) = u(\xi)v(\xi) = 0$ . Nous pouvons donc conclure que tous les points singuliers d'une courbe PH correspondent aux valeurs des racines réelles du polynôme  $w$ .

La présence de points singuliers est indésirable dans le cadre de notre étude, il nous suffira donc de ne considérer par la suite uniquement les courbes PH construites par un triplet pythagoricien avec  $w = \mathbb{1}$ . On sait donc que si une courbe PH est générée par un triplet pythagoricien primitif, elle sera régulière.

Dans ce cas, on aura  $\lambda = \deg(w) = 0$  ce qui implique que le degré de la courbe vaut  $n = 2\mu + 1$  et est ainsi toujours impair.

### 3.3 Courbes cubiques

#### 3.3.1 Caractérisation des points de contrôle d'une courbe PH cubique

On se place à présent dans le cas d'une courbe cubique  $r(t)$ , c'est à dire une courbe de degré 3. Nous considérons ici uniquement les hodographes basés sur des triplets pythagoriciens primitifs, c'est à dire  $\gcd(u(t), v(t)) = 1$  et  $w(t) = \mathbb{1}$ . On souhaite que  $r(t)$  soit de degré 3, il faut donc que son hodographe  $r'$  soit quadratique. On prend donc  $u$  et  $v$  des polynômes de degré 1 et les exprimons sous forme de combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de premier degré :

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t) \text{ et } v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

ou  $u_0, u_1, v_0, v_1$ , les coefficients de  $u$  et  $v$  sont des réels tels que  $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$  et  $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$  de manière à ce que  $u(t)$  et  $v(t)$  soient premiers entre eux et non constants.. Avant d'exprimer  $x'(t)$  et  $y'(t)$ , réalisons quelques calculs préliminaires :

- $B_0^1(t) = 1 - t \implies (B_0^1(t))^2 = (1 - t)^2 = B_0^2(t)$
- $B_1^1(t) = t \implies (B_1^1(t))^2 = t^2 = B_2^2(t)$
- $B_0^1(t)B_1^1(t) = t(1 - t) = \frac{1}{2}B_1^2(t)$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t))^2 - (v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t))^2 \\ &= u_0^2 B_0^2(t) + 2u_0 u_1 \frac{1}{2} B_1^2(t) + u_1^2 B_2^2(t) - v_0^2 B_0^2(t) - 2v_0 v_1 \frac{1}{2} B_1^2(t) - v_1^2 B_2^2(t) \\ &= B_0^2(t)[u_0^2 - v_0^2] + B_1^2(t)[u_0 u_1 - v_0 v_1] + B_2^2(t)[u_1^2 - v_1^2] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Et :

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 2 [(u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)) (v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t))] \\
&= 2 \left[ u_0 v_0 B_0^2(t) + u_0 v_1 \frac{1}{2} B_1^2(t) + u_1 v_0 \frac{1}{2} B_1^2(t) + u_1 v_1 B_2^2(t) \right] \\
&= B_0^2(t)[2u_0 v_0] + B_1^2(t)[u_0 v_1 + u_1 v_0] + B_2^2(t)[2u_1 v_1]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

D'après (3.3) et (3.4) on obtient l'expression suivante de l'hodographe :

$$r'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = B_0^2(t) \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0 v_0 \end{pmatrix} + B_1^2(t) \begin{pmatrix} u_0 u_1 - v_0 v_1 \\ u_0 v_1 + u_1 v_0 \end{pmatrix} + B_2^2(t) \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1 v_1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Notons les points coefficients des 3 polynômes de Bernstein respectivement  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On souhaite retrouver l'expression de la courbe  $r(t)$ . Il nous faut donc intégrer  $r'(t)$ , or nous avons montré dans (2.2) que :

$$\int B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t) + C \quad \text{avec } C \text{ la constante d'intégration}$$

Utilisons donc cette formule pour intégrer  $r'(t)$  :

$$\begin{aligned}
\int r'(t) dt &= A \int B_0^2(t) dt + B \int B_1^2(t) dt + C \int B_2^2(t) dt \\
&= \frac{1}{3} A \sum_{i=1}^3 B_i^3(t) + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} + \frac{1}{3} B \sum_{i=2}^3 B_i^3(t) + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} + \frac{1}{3} C \sum_{i=3}^3 B_i^3(t) + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} [A (B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)) + B (B_2^3(t) + B_3^3(t)) + C B_3^3(t)] + D
\end{aligned}$$

Avec  $D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix}$  la somme des constantes d'intégration vectorielles, arbitrairement choisies.

On essaie de se ramener à la forme classique d'une courbe de Bézier, soit  $r(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$ . On réarrange donc les termes comme suit :

$$r(t) = B_1^3(t) \left( \frac{A}{3} \right) + B_2^3(t) \left( \frac{A+B}{3} \right) + B_3^3(t) \left( \frac{A+B+C}{3} \right) + D$$

Nous remarquons qu'il est impossible de se ramener à la forme évoquée plus haut car nous n'avons aucun terme en  $B_0^3(t)$ . Pour pallier cela nous allons utiliser la propriété de partition de l'unité des polynômes de Bernstein, selon laquelle :

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
D &= D * 1 = D \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = D \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \\
\implies r(t) &= B_1^3(t) \left( \frac{A}{3} \right) + B_2^3(t) \left( \frac{A+B}{3} \right) + B_3^3(t) \left( \frac{A+B+C}{3} \right) + D (B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)) \\
&= B_0^3(t)D + B_1^3(t) \left( \frac{A}{3} + D \right) + B_2^3(t) \left( \frac{A+B}{3} + D \right) + B_3^3(t) \left( \frac{A+B+C}{3} + D \right) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc enfin identifier cette expression aux équations d'une courbe de Bézier cubique et ainsi en exprimer les points de contrôle :

- $P_0 = D$
- $P_1 = \frac{1}{3}A + D = P_0 + \frac{1}{3}A$
- $P_2 = \frac{1}{3}(A+B) + D = P_1 + \frac{1}{3}B$
- $P_3 = \frac{1}{3}(A+B+C) + D = P_2 + \frac{1}{3}C$

En réinjectant les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  nous obtenons l'expression générale des points de contrôle d'une courbe de Bézier cubique à hodographe pythagoricien :

- $\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}$
- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + u_1v_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix}$

On choisira le premier point de contrôle  $\mathbf{P}_0$  librement. Nous avons donc déterminé une manière de construire une courbe de Bézier cubique à hodographe pythagoricien se basant sur les coordonnées de ses points de contrôle  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ .

### 3.3.2 Caractérisation par le polygone de contrôle d'une courbe PH cubique

Il peut être intéressant d'apporter une construction d'une courbe de Bézier cubique PH par la géométrie de son polygone de contrôle, défini par les quatre points de contrôle cités précédemment, et ses quatre côtés que nous noterons  $\Delta\mathbf{P}_0, \Delta\mathbf{P}_1, \Delta\mathbf{P}_2, \Delta\mathbf{P}_3$ . Le côté  $\Delta\mathbf{P}_3$  ne servant qu'à fermer le polygone (pour ainsi lui conférer ce nom) n'a aucune influence sur la courbe, nous le négligerons donc. On caractérise alors également le polygone de contrôle par les deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  formés respectivement par  $(L_0; L_1)$  et  $(L_1; L_2)$ .

De manière générale, nous pouvons définir le côté  $\Delta\mathbf{P}_i$  d'un polygone de contrôle à  $n$  points par :

$$\Delta\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i \quad , \forall i \text{ tel que } 0 \leq i < n - 1 \quad (3.8)$$

Nous pouvons alors définir la longueur des  $\Delta\mathbf{P}_i$  pour une courbe cubique PH avec des points de contrôle de la forme démontrée plus haut (.) :

- $L_0 = |\Delta\mathbf{P}_0| = \left| \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix} - \mathbf{P}_0 \right| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 - v_0^2)^2 + (2u_0v_0)^2} = \frac{1}{3} (u_0^2 + v_0^2)$
- $L_1 = |\Delta\mathbf{P}_1| = \left| \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + u_1v_0 \end{pmatrix} - \mathbf{P}_1 \right| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0u_1 - v_0v_1)^2 + (u_0v_1 + u_1v_0)^2} = \sqrt{u_0^2u_1^2 - 2u_0u_1v_0v_1 + v_0^2v_1^2 + u_0^2v_1^2 + 2u_0v_1u_1v_0 + u_1^2v_0^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}$
- $L_2 = |\Delta\mathbf{P}_2| = \left| \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix} - \mathbf{P}_2 \right| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_1^2 - v_1^2)^2 + (2u_1v_1)^2} = \frac{1}{3} (u_1^2 + v_1^2)$

Nous remarquons clairement que ces trois côtés satisfont l'expression suivante :

$$L_1^2 = L_0L_2 \implies L_1 = \sqrt{L_0L_2} \quad (3.9)$$

Comme le polygone de contrôle est également caractérisé par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement "à l'intérieur" des points  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ , cherchons une relation entre ces angles, et nous aurons complètement identifié géométriquement le polygone de contrôle d'une courbe PH cubique. En utilisant les définitions du produit vectoriel et du produit scalaire suivantes :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| * \|\vec{B}\| * \sin(\vec{A}; \vec{B}) * \vec{z} \quad , \text{ pour deux vecteurs du plan } (O; Ox, Oy)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| * \|\vec{B}\| * \cos(\vec{A}; \vec{B})$$

nous allons identifier les expressions de  $\cos \theta_1$ ,  $\sin \theta_1$ ,  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$ .

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\Delta\mathbf{P}_0 \cdot \Delta\mathbf{P}_1}{L_0L_1} = \frac{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + u_1v_0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2) \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{u_0u_1 + v_0v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\ \cos \theta_2 &= \frac{\Delta\mathbf{P}_1 \cdot \Delta\mathbf{P}_2}{L_1L_2} = \frac{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + u_1v_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix}}{\frac{1}{9}(u_1^2 + v_1^2) \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{u_0u_1 + v_0v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\ \sin \theta_1 &= \frac{\Delta\mathbf{P}_0 \wedge \Delta\mathbf{P}_1}{L_0L_1} = \frac{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + u_1v_0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2) \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{u_1v_0 - v_1v_0}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \end{aligned}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\Delta \mathbf{P}_1 \wedge \Delta \mathbf{P}_2}{L_1 L_2} = \frac{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} u_0 u_1 - v_0 v_1 \\ u_0 v_1 + u_1 v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1 v_1 \end{pmatrix}}{\frac{1}{9}(u_1^2 + v_1^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{u_1 v_0 - v_1 v_0}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}$$

On a donc  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$  et  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ , ce qui nous assure que  $\theta_1 = \theta_2$ . On peut ainsi établir l'implication suivante :

Une courbe de Bézier cubique est à hodographe pythagoricien  $\implies L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$  et  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

Prouvons à présent l'implication réciproque pour assurer l'équivalence de ces deux propriétés. Nous nous plaçons donc dans le cas d'une courbe planaire cubique  $\mathbf{r}(t)$  non établie comme étant une courbe PH, mais dont le polygone de contrôle de côtés  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  de longueurs respectives  $L_0, L_1$  et  $L_2$  garantit les relations  $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$  et  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Commençons par ramener le polygone de contrôle à l'origine du repère. On va donc faire coïncider  $\mathbf{P}_0$  avec l'origine du repère et  $\mathbf{C}_0$  avec l'axe horizontal. Pour conserver la nature du polygone de contrôle, on applique une rotation de  $\theta$  à  $\mathbf{C}_1$  et de  $2\theta$  à  $\mathbf{C}_2$ ; on obtient donc les trois nouveaux côtés :

$$\tilde{\mathbf{C}}_0 = L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_1 = L_1 \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \sqrt{L_0 L_2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 = L_2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

On peut illustrer cette transformation par le schéma suivant :

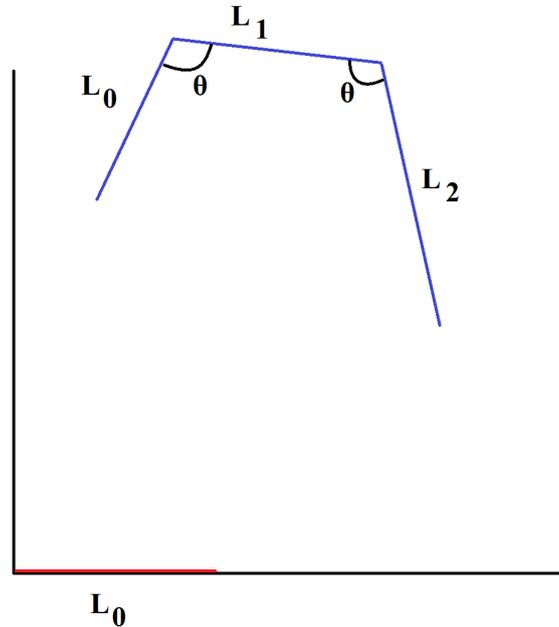


FIGURE 3.2 – On rapporte le premier côté  $\mathbf{C}_0$  (de longueur  $L_0$ ) le long de l'axe horizontal en faisant correspondre le point de contrôle  $\mathbf{P}_0$  à l'origine du repère

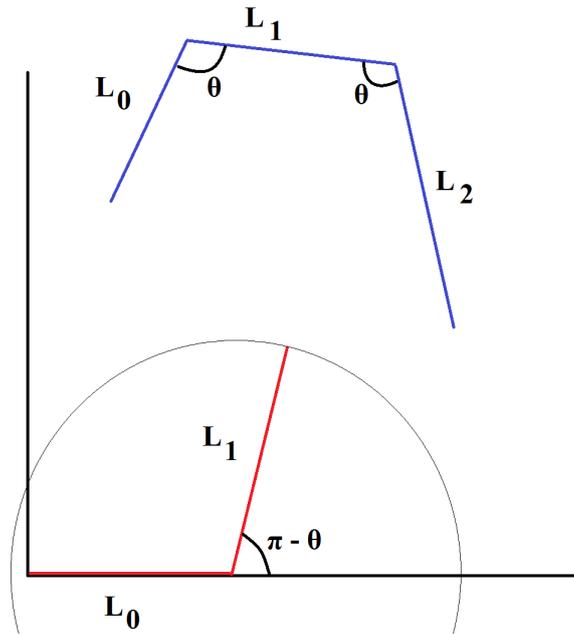


FIGURE 3.3 – On donne une rotation de  $\pi - \theta$  à  $C_1$ . On a bien  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  et  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ .

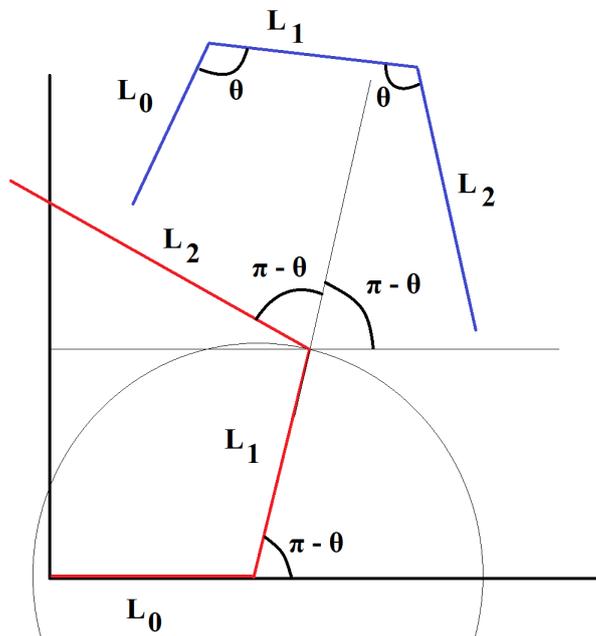


FIGURE 3.4 – On donne enfin une rotation de  $2(\pi - \theta)$  à  $C_2$ . On a bien  $\cos(2(\pi - \theta)) = \cos 2\theta$  et  $\sin(2(\pi - \theta)) = -\sin 2\theta$ .

On peut à présent exprimer les coordonnées des quatre nouveaux points de contrôle. On a alors :

- $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\tilde{\mathbf{P}}_1 = \tilde{\mathbf{P}}_0 + L_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_1 + \sqrt{L_0 L_2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
- $\tilde{\mathbf{P}}_3 = \tilde{\mathbf{P}}_2 + L_2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix}$

La courbe de Bézier cubique associée à ces 4 points de contrôle est d'équation :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^3 \tilde{\mathbf{P}}_k B_k^3(t) \quad (3.11)$$

On obtient alors son hodographe par dérivation :

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{k=0}^3 \tilde{\mathbf{P}}_k \frac{d}{dt} (B_k^3(t)) \quad (3.12)$$

On a montré précédemment que :

$$\frac{d}{dt} (B_k^n(t)) = n [B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)] \quad \text{avec} \quad B_{-1}^{n-1} = 0 \quad , \quad B_n^{n-1} = 0$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= -3\tilde{\mathbf{P}}_0 B_0^2(t) + 3\tilde{\mathbf{P}}_1 B_0^2(t) - 3\tilde{\mathbf{P}}_1 B_1^2(t) + 3\tilde{\mathbf{P}}_2 B_1^2(t) - 3\tilde{\mathbf{P}}_2 B_2^2(t) + 3\tilde{\mathbf{P}}_3 B_2^2(t) \\ &= 3 \left[ B_0^2(t) \left( -\tilde{\mathbf{P}}_0 + \tilde{\mathbf{P}}_1 \right) + B_1^2(t) \left( -\tilde{\mathbf{P}}_1 + \tilde{\mathbf{P}}_2 \right) + B_2^2(t) \left( -\tilde{\mathbf{P}}_2 + \tilde{\mathbf{P}}_3 \right) \right] \end{aligned}$$

On remarque que  $-\tilde{\mathbf{P}}_n + \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{C}}_n$  ce qui nous donne donc :

$$\mathbf{r}'(t) = 3 \sum_{k=0}^2 \tilde{\mathbf{C}}_k B_k^2(t) \quad (3.13)$$

Nous souhaitons déterminer si cet hodographe est pythagoricien, c'est-à-dire s'il existe un polynôme  $\sigma(t)$  tel que :

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$$

Calculons donc  $|\mathbf{r}'(t)|^2$  :

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = \left| 3 \sum_{k=0}^2 \tilde{\mathbf{C}}_k B_k^2(t) \right|^2$$

On a prouvé que  $|z|^2 = |z^2|$ , on a donc :

$$|\mathbf{r}'(\mathbf{t})|^2 = 9 \sum_{k=0}^4 D_k B_k^4(t) \quad (3.14)$$

avec  $D_k$  les nouveaux coefficients de Bernstein de ce polynôme. On précise qu'on double le degré maximal des polynômes de Bernstein car le carré d'une somme de polynômes de degré au plus 2 vaut une somme de polynômes de degré au plus 4. Réalisons quelques calculs préliminaires :

- $B_0^2(t) = (1-t)^2 \implies (B_0^2(t))^2 = (1-t)^4 = B_0^4(t)$
- $B_2^2(t) = t^2 \implies (B_2^2(t))^2 = t^4 = B_4^4(t)$
- $B_1^2(t) = 2t(1-t) \implies (B_1^2(t))^2 = 4t^2(1-t)^2 = \frac{2}{3}B_2^4(t)$
- $B_0^2(t)B_2^2(t) = t^2(1-t)^2 = \frac{1}{6}B_2^4(t)$
- $B_1^2(t)B_2^2(t) = 2t^3(1-t) = \frac{1}{2}B_3^4(t)$
- $B_0^2(t)B_1^2(t) = 2t(1-t)^3 = \frac{1}{2}B_1^4(t)$
- $(a+b+c)^2 + (d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2(ab+ac+bc+de)$

On peut donc identifier les coefficients  $D_k$  par le rang de leur polynôme de Bernstein : par exemple  $D_0$  est facteur de  $B_0^4(t)$  qui lui-même vient du terme  $(B_0^2(t))^2$ , on sait donc que  $D_0 = 9 \left| \tilde{\mathbf{C}}_0 \right|^2 = L_0^2$ .

Par ce même procédé, on identifie les coefficients :

- $D_0 = 9L_0^2$
- $D_1 = 2 \left[ 9\frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{C}}_0 \tilde{\mathbf{C}}_1 \right| \right] = -9L_0\sqrt{L_0L_2} \cos \theta$
- $D_2 = 9 \left( \frac{2}{3} \left| \tilde{\mathbf{C}}_1 \right|^2 + 2\frac{1}{6} \left| \tilde{\mathbf{C}}_0 \tilde{\mathbf{C}}_2 \right| \right) = 9 \left( \frac{2}{3}L_0L_2 + \frac{1}{3}L_0L_2 \cos(2\theta) \right) = 3L_0L_2 (2 + \cos(2\theta))$
- $D_3 = 2 \left[ 9\frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{C}}_2 \right| \right] = -9L_2\sqrt{L_0L_2}(\cos \theta \cos 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta) = -9L_2\sqrt{L_0L_2} \cos \theta$
- $D_4 = 9 \left| \tilde{\mathbf{C}}_2 \right|^2 = 9L_2^2$

On peut donc identifier ce polynôme de degré 4 au carré du polynôme de degré 2 suivant :

$$\sigma(t) = 3 \left[ L_0 B_0^2(t) - \sqrt{L_0L_2} \cos \theta B_1^2(t) + L_2 B_2^2(t) \right] \quad (3.15)$$

On a donc prouvé que  $|\mathbf{r}'(\mathbf{t})| = \sigma^2(t)$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  est donc une courbe PH, ainsi on a

$$L_1 = \sqrt{L_0L_2} \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \implies \text{La courbe est PH}$$

Nous avons déjà prouvé l'implication réciproque, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 6** Une courbe paramétrée cubique est une courbe PH si et seulement si son polygone de contrôle de cotés  $\Delta P_0, \Delta P_1$  et  $\Delta P_3$  de longueurs respectives  $L_0, L_1$  et  $L_2$  respecte  $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$  et les angles vérifient  $(\Delta P_0, \Delta P_1) = (\Delta P_1, \Delta P_2)$ .

Ainsi, tout les triplets de longueur respectant pour un réel  $a$  les relations  $L_0 = aL_1$  et  $L_2 = \frac{L_1}{a}$  vérifient la première partie de ce critère.

On peut donc donner un algorithme de construction graphique du polygone de contrôle d'une courbe cubique PH :

1. Choisir un longueur réelle  $L_1$ , un coefficient réel  $a$  ainsi qu'un angle  $\theta$ .
2. Tracer le premier côté du polygone, de longueur  $aL_1$ .
3. Tracer le deuxième côté, de longueur  $L_1$ , de manière à ce qu'il forme un angle  $\theta$  avec le premier côté.
4. Tracer le dernier côté, de longueur  $\frac{L_1}{a}$ , formant un angle  $\theta$  avec le deuxième côté.

On a donc une méthode excessivement simple pour un créer un polygone de contrôle d'une courbe PH cubique.

On trouvera dans [2] la preuve que toutes les courbes PH cubiques sont toutes des sections d'une seule et même courbe, *la cubique de Tschirnhaus*, à une composition d'homothéties, rotations, translation près. Tout segment de cette cubique respecte les deux critères géométriques exposés plus haut, assurant la possession d'un hodographe pythagorien.

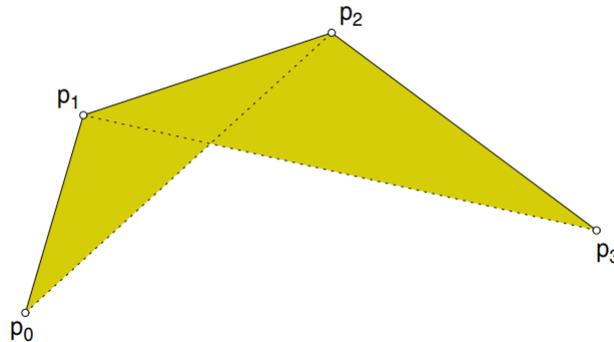


FIGURE 3.5 – On peut associer les conditions géométriques démontrées plus haut à la similarité de deux triangles, ce qui apporte une construction très visuelle aux courbes PH cubiques.

## 3.4 Courbes PH de plus haut degré

### 3.4.1 Courbes quartiques

On appelle courbe quartique une courbe de degré 4. On a expliqué au debut de ce chapitre qu'un courbe de degré pair n'était pas nécessairement régulière. En effet, pour avoir une courbe

de degré 4, il faut avoir un hodographe de degré 3 : cela est impossible en choisissant un triplet pythagoricien tel que  $w(t) = \mathbb{1}$  car la différence des carrés de deux polynômes de degré 2 ( $u$  et  $v$ ) est de degré 4 (en réalité si les coefficients dominants de  $u^2$  et  $v^2$  sont opposés, on pourra obtenir un hodographe de degré 3 avec  $w = \mathbb{1}$ , et ainsi obtenir une courbe PH quartique régulière, mais c'est un cas unique).

On choisira donc trois polynômes linéaires exprimés dans la base de Bernstein :

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \quad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \quad w(t) = w_0 B_0^1(t) + w_1 B_1^1(t)$$

On sait que la courbe présente un point singulier pour chaque racine réelle de  $w(t)$ , il peut donc être opportun d'exprimer ce polynôme en fonction de sa racine (c'est un polynôme de degré 1, il présente donc une racine unique). On écrira donc  $w(t)$  sous la forme :

$$w(t) = -\xi B_0^1(t) + (1 - \xi) B_1^1(t) \quad (3.16)$$

On voit facilement en développant cette expression que  $w(t) = 0 \implies t = \xi$ .

Nous pouvons donc exprimer les points de contrôle d'une courbe PH quartique tout en conservant l'information illustrant le point singulier de la courbe.

Suivons à présent la démarche de la section 3.3.1 pour établir les expressions du polygone de contrôle.

En développant  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans les expressions de  $x'$  et  $y'$ , on obtient rapidement :

$$x'(t) = \sum_{i=0}^3 a_i B_i^3(t) \quad (3.17)$$

avec  $a_i$  le  $i$ -ième coefficient de Bernstein du polynôme tels que :

- $a_0 = -\xi(u_0^2 - v_0^2)$
- $a_1 = \frac{1-\xi}{3}(u_0^2 - v_0^2) - \frac{2\xi}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1)$
- $a_2 = \frac{2(1-\xi)}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1) - \frac{\xi}{3}(u_1^2 - v_1^2)$
- $a_3 = (1 - \xi)(u_1^2 - v_1^2)$

On a également :

$$y'(t) = \sum_{i=0}^3 b_i B_i^3(t) \quad (3.18)$$

avec  $b_i$  le  $i$ -ième coefficient de Bernstein du polynôme tels que :

- $b_0 = -2\xi u_0 v_0$
- $b_1 = \frac{2(1-\xi)}{3} u_0 v_0 - \frac{2\xi}{3} (u_0 v_1 + v_1 v_0)$
- $b_2 = \frac{2(1-\xi)}{3} (u_0 v_1 + v_1 v_0) - \frac{2\xi}{3} u_1 v_1$

- $b_3 = 2(1 - \xi)u_1v_1$

On en déduit donc l'expression de l'hodographe d'une courbe PH quartique :

$$\mathbf{r}'(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^3 \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} B_i^3(t) \quad (3.19)$$

On peut nommer les quatre coefficients A, B, C et D pour plus de clarté.

Il nous suffit d'intégrer l'expression de l'hodographe pour obtenir une forme explicite de  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ , et ainsi donner une caractérisation par leur coordonnées des points de contrôle.

$$\begin{aligned} \int r'(t)dt &= A \int B_0^3(t)dt + B \int B_1^3(t)dt + C \int B_2^3(t)dt + D \int B_3^3(t)dt \\ &= \frac{1}{4}A \sum_{i=1}^4 B_i^4(t) + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} + \frac{1}{4}B \sum_{i=2}^4 B_i^4(t) + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} + \frac{1}{4}C \sum_{i=3}^4 B_i^4(t) + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} + \frac{1}{4}D \sum_{i=4}^4 B_i^4(t) + \begin{pmatrix} \delta \\ \delta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant E la somme des constantes d'intégration et en utilisant la propriété de partition de l'unité des polynômes de Bernstein sur ces dernières on obtient analoguement au paragraphe 3.3.1 :

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = B_0^4(t)E + B_1^4(t) \left( \frac{A}{4} + E \right) + B_2^4(t) \left( \frac{A+B}{4} + E \right) + B_3^4(t) \left( \frac{A+B+C}{4} + E \right) + B_4^4(t) \left( \frac{A+B+C+D}{4} + E \right)$$

Nous pouvons donc enfin identifier cette expression aux équations d'une courbe de Bézier cubique et ainsi en exprimer les points de contrôle. En arrangeant les termes pour une meilleure lecture on a :

- $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}$
- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 - \frac{\xi}{4} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1-\xi}{12} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix} - \frac{\xi}{6} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + v_1u_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{1-\xi}{6} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + v_1u_0 \end{pmatrix} - \frac{\xi}{12} \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 + \frac{1-\xi}{4} \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix}$

On choisira le premier point de contrôle  $\mathbf{P}_0$  librement. Nous avons donc déterminé une manière de construire une courbe de Bézier quartique à hodographe pythagorien se basant sur les coordonnées de ses points de contrôle  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ . Cette expression est intéressante car elle permet de "placer" un point singulier pour  $t = \xi$ .

Il serait compréhensible de vouloir un critère géométrique analogue à celui énoncé pour les cubiques pour obtenir une représentation plus intuitive, mais malheureusement il n'existe aucune

expression claire. On retrouvera dans [5] et [6] des critères géométriques pour les courbes PH quartiques, mais ces derniers n'apportent aucune aide du fait de leur apparence dense et obscure. De plus, avec l'augmentation du degré de la courbe, vient l'augmentation du nombre d'équations à vérifier simultanément dans le système de contraintes géométriques.

### 3.4.2 Courbes quintiques

En passant des courbes quartiques aux courbes quintiques, nous retrouvons un degré impair et donc une courbe régulière. On prendra donc  $w = 1$  et deux polynômes quadratiques  $u$  et  $v$  exprimés dans la base de Bernstein, de coefficients  $u_0, u_1, u_2$  et  $v_0, v_1, v_2$ . On ne détaillera pas les calculs car ils sont analogues à ceux réalisés pour les courbes cubiques et quartiques, mais nous retiendrons que nous pouvons exprimer les coordonnées des points de contrôle d'une courbe PH quintique avec :

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} u_0^2 - v_0^2 \\ 2u_0v_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} u_0u_1 - v_0v_1 \\ u_0v_1 + v_1u_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{2}{15} \begin{pmatrix} u_1^2 - v_1^2 \\ 2u_1v_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} u_0u_2 - v_0v_2 \\ u_0v_2 + v_2u_0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} u_1u_2 - v_1v_2 \\ u_1v_2 + v_1u_2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_5 = \mathbf{P}_4 + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} u_2^2 - v_2^2 \\ 2u_2v_2 \end{pmatrix}$

Les courbes PH quintiques sont intéressantes car elles sont les courbes PH de plus bas degré pouvant présenter un point d'inflexion réel, c'est à dire un point pour lequel la courbure de la courbe change de signe (on peut voir cela en disant que la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente au point d'inflexion). On peut montrer facilement que cela n'est pas possible pour une courbe PH quadratique, cubique ou quartique (ces dernières peuvent néanmoins présenter d'autres types de point singulier). Cela donne donc une liberté géométrique supplémentaire à ce type de courbes.

Les courbes quintiques présentent également des propriétés attractives en termes d'interpolation/approximation. On pourra se référer à [7] pour une introduction à l'interpolation et à [2] pour plus de détails dans le cadre des courbes PH.

## 3.5 Introduction à la représentation complexe

### 3.5.1 Bijection entre les courbes polynômiales et les courbes PH

Nous achèverons ce rapport en ouvrant notre étude sur une toute nouvelle représentation des fonctions vectorielles utilisant les nombres complexes. Nous nous astreindrons à une simple introduction mais renvoyons le lecteur à la lecture de [8] pour plus de détails.

L'essence de cette représentation repose sur l'illustration d'un point  $(x, y)$  du plan Euclidien par un nombre complexe  $x + iy$ . On peut noter  $\mathbf{z}$  ces deux quantités interchangeable. On considère que le lecteur est familier avec les règles de calcul des nombres complexes ainsi qu'avec la représentation polaire d'un nombre complexe du type  $z = re^{i\theta}$ .

On illustrera donc une courbe paramétrée par une fonction à valeur complexe  $\mathbf{z}(t)$ . L'intérêt d'une telle représentation est la faculté de créer de nouvelles courbes à partir d'une courbe donnée en "distordant" le plan complexe dans lequel elle réside par le biais d'une transformation conforme.

Une transformation conforme peut être définie comme une application bijective qui conserve localement les angles, c'est-à-dire qui se comporte au voisinage de chaque point où elle est définie presque comme une similitude.

Nous allons donc établir à l'aide d'une application de la sorte, une correspondance entre l'ensemble  $\Pi$  des courbes polynômiales et l'ensemble  $\tilde{\Pi}$  des courbes PH. Ces deux ensembles sont infinis et présentent des cardinalités égales (la cardinalité représente la "quantité" d'éléments contenus dans un ensemble). On sait que toute courbe PH est polynômiale (mais toute courbe polynômiale n'est pas PH), on a donc  $\tilde{\Pi} \subset \Pi$ .

On définit deux plans complexes,  $\mathbf{z} = x + iy$  et  $\mathbf{w} = u + iv$ , contenant respectivement une courbe  $\mathbf{z}(t)$  et son hodographe  $\mathbf{w}(t)$ .

Définissons la procédure permettant de faire correspondre à une courbe polynômiale  $\mathbf{z}(t)$  une courbe PH  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$  :

1. Dériver  $\mathbf{z}(t)$  pour obtenir son hodographe  $\mathbf{z}'(t)$ .
2. Appliquer la transformation conforme  $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}^2$  au plan  $\mathbf{w}$  de l'hodographe. On notera  $\tilde{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t)$ .
3. Intégrer l'hodographe transformé pour obtenir la nouvelle courbe PH telle que  $\tilde{\mathbf{z}}(t) = \int \tilde{\mathbf{w}}(t)$ .

Ainsi, cette procédure représente une transformation bijective (chaque image n'a qu'un seul antécédent et vice versa) entre les ensembles  $\Pi$  et  $\tilde{\Pi}$  respectivement de courbes polynômiales et courbes PH.

*Preuve :* Considérons une courbe polynômiale  $\mathbf{z}(t) = x(t) + iy(t)$  d'hodographe  $\mathbf{w}(t) = u(t) + iv(t)$  avec  $u = x'$  et  $v = y'$ . On voit clairement que  $\mathbf{w}(t)$  ne passe pas par l'origine, ainsi on peut dire

que  $\gcd(u,v)=1$  (les polynômes sont premiers entre eux). L'étape 2 donne alors

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t) \quad (3.20)$$

Cet hodographe respecte bien le critère de Pythagore et présente bien  $\gcd(u,v)=1$ . C'est bien un hodographe pythagoricien, en intégrant  $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ , on obtiendra donc bien une courbe PH  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$  unique. On a donc montré que cette procédure est une application surjective.

Raisonnons à présent dans l'autre sens. Considérons une courbe PH  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ , son hodographe est nécessairement de la forme

$$\tilde{\mathbf{w}}^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t) \quad (3.21)$$

avec  $\gcd(u,v)=1$ . En appliquant l'application reciproque de l'étape 2, on transforme  $\tilde{\mathbf{w}}$  en

$$\mathbf{w}(t) = \sqrt{\tilde{\mathbf{w}}(t)} = \pm[u(t) + iv(t)] \quad (3.22)$$

C'est là bien un hodographe ne passant pas par l'origine. Nous pouvons l'intégrer et obtenir (à une translation prêt du fait des constantes d'intégration) une unique courbe  $\mathbf{z}(t)$  correspondant à  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ . L'ambiguïté sur le signe ne change pas la géométrie de la courbe, mais uniquement le sens d'évolution du paramètre  $t$ , il sera donc choisi arbitrairement. On a donc montré que cette procédure est une application injective.

Une application surjective et injective est bijective, nous avons donc démontré le résultat recherché.

### 3.5.2 Simplification : exemple des courbes cubiques

Nous avons donc établi les bases de la représentation des courbes paramétrées dans un plan complexe, on se propose de l'illustrer en se replaçant dans le cas déjà étudié des courbes PH cubiques.

On peut exprimer les points de contrôles d'une courbe PH cubique (nous avons déjà déterminé les expressions précédemment) sous forme complexe :

- $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_0^2$
- $\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1$
- $\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_1^2$

Le premier point est toujours choisi arbitrairement. Les conditions de régularité que nous avons énoncées lors de notre étude dans le plan réel se traduisent en notation complexe par :

$$\Im(\overline{\mathbf{w}_0}\mathbf{w}_1) \neq 0$$

Réécrivons ces relations sur les points de contrôle en terme de côté du polygone de contrôle. On note  $i$ -ième coté  $\Delta \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}$ . On a alors :

$$\Delta \mathbf{z}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{w}_0^2 \quad , \quad \Delta \mathbf{z}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \quad , \quad \Delta \mathbf{z}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{w}_1^2$$

En substituant  $\mathbf{w}_0$  et  $\mathbf{w}_1$  dans l'expression de  $\Delta \mathbf{z}_2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_2 &= \frac{1}{3} \sqrt{3 \Delta \mathbf{z}_1 3 \Delta \mathbf{z}_3} = \sqrt{\Delta \mathbf{z}_1 \Delta \mathbf{z}_3} \\ \implies \Delta \mathbf{z}_2^2 &= \Delta \mathbf{z}_1 \Delta \mathbf{z}_3 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ce critère est ainsi suffisant pour caractériser toute courbe PH cubique. Cette expression comporte également l'information sur les angles. En effet, en la réécrivant sous forme polaire on obtient :

$$\Delta \mathbf{z}_k = L_k e^{i\alpha_k} \tag{3.24}$$

On peut donc utiliser cette forme dans le critère que nous venons de déterminer et obtenir :

$$L_2^2 e^{2i\alpha_2} = L_1 L_3 e^{i(\alpha_1 + \alpha_3)}$$

En identifiant il vient  $L_2^2 = L_1 L_3$  et  $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$ . On a en terme d'angles "interieurs"  $\theta_1 = \pi + \alpha_2 - \alpha_1$  et  $\theta_2 = \pi + \alpha_3 - \alpha_2$ . On en déduit donc  $\theta_1 = \theta_2$ . Nous avons donc bien retrouvé les deux critères géométriques de la partie 3.3.2.

Nous voyons donc que la détermination de ce critère en passant par la forme complexe nous a économisé de nombreux calculs fastidieux et nous à apporté une illustration bien plus visuelle au problème. C'est pourquoi cette représentation est utilisée récursivement dans des cas de plus haut degré. Nous pouvons par exemple grâce à elle déterminer un ensemble de contrainte géométriques définissant une courbe PH quintique.

Nous n'avons ici que présenté le fonctionnement général de cette représentation, mais elle renferme de nombreuses informations géométriques très utiles à l'étude des courbes à hodographe pythagoricien, on pourra se référer à [2] pour une étude plus en profondeur de ce pan d'étude.

## Références

### Crédits images

Polynômes de Bernstein : By VisorZ - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?rid=40129768>

Image vectorielle : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Image\\_vectorielle#/media/Fichier:Drupe-fruit-diagram-no-text.svg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Image_vectorielle#/media/Fichier:Drupe-fruit-diagram-no-text.svg)

Lettre "e" : <https://aromaths.files.wordpress.com/2017/03/e-ps.jpg>

Similarité de deux triangles : in [2]

### Ressources bibliographiques

[1]F. Holweck et J.N. Martin (2013), Géométries pour l'ingénieur, *Ellipses*.

[2]R.T. Farouki (2008), Pythagorean Hodograph curves : Algebra and Geometry inseparable, *Springer*.

[3]F. Pelosi, M. L. Sampoli, R. T. Farouki, et C. Manni (2007), A control polygon scheme for design of planar  $C^2$  PH quintic spline curves, *Comput.Aided Geom. Design*.

[4]M.P. Do Carmo (1976), Differential Geometry of curves and surfaces, *Prentice-Hall*.

[5]R.T.Farouki, T. Sakkalis (1990), Pythagorean Hodographs, *IBM J. Res. Dev. vol. 34 No. 5*.

[6]G. Albrecht, C. T. Beccari, J.-C. Cannone, L. Romani (2016), Pythagorean-Hodograph B-Spline Curves

[7]F. Holweck, MT44 - Analyse numérique et splines, *Cours UTBM*.

[8] R. T. Farouki (1994). The conformal map  $z \rightarrow z^2$  of the hodograph plane. *Computer Aided Geometric Design*.

## Ressources internet

- [9] Wikipedia - Transformation conforme
- [10] Wikipedia - Interpolation d'Hermite
- [11] Wikipedia - Triplet pythagorien